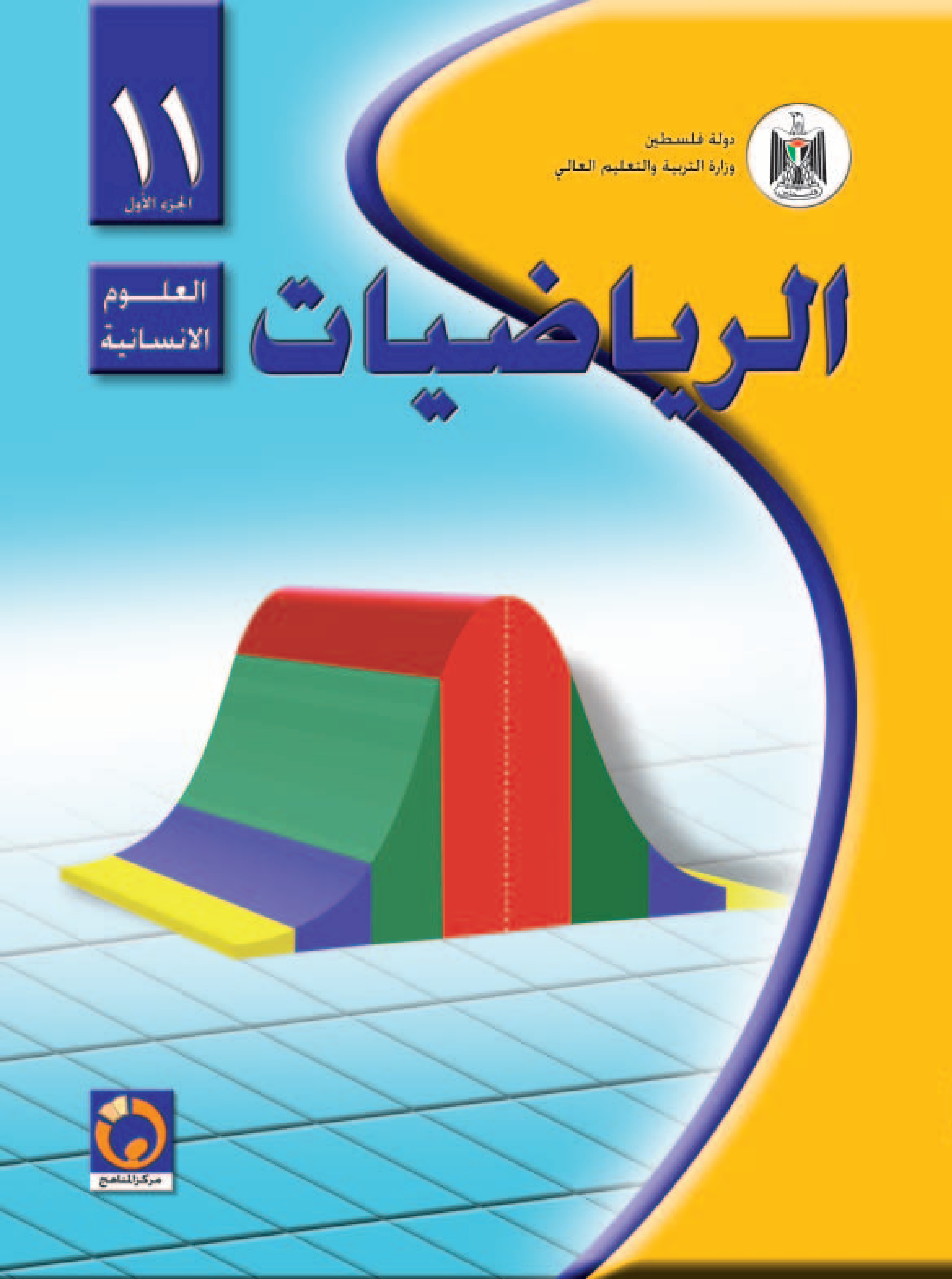
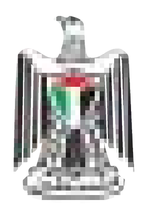

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
١١
الجزء الأول
الرياضيات
العلوم الانسانية
مركز المناهج





دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيّات

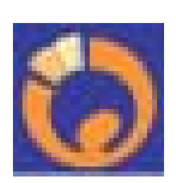
الجزء الأول

للصف الأول الثانوي

العلوم الإنسانية والتجاري والفندقي

المؤلفون

د. فطين مسعد (منسقاً)
أ. محمد عالية
أ. محمد مقبل
أ. عبد الكريم صالح



قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي في مدارسها للعام الدراسي ٢٠٠٥/ ٢٠٠٦م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج: د. نعيم أبو الحمص
مدير عام مركز المناهج: د. صلاح ياسين

مركز المناهج

إشراف تربوي: د.عمر أبوالحمص

الدائرة الفنية

- إشراف إداري: رائد بركات
- تصميم: أماني باسم حبوب
- الإعداد المحوسب للطباعة: حمدان بجبوج
- تنضيد: اسمهان فوزي الديسي

الفريق الوطني لمنهاج الرياضيات

د. فطين مسعد «منسقاً»
علي خليل حمد
د. محمد حمدان
د. الياس ضبيط
د. علي خليفة
محمد مقبل
شهناز الفار
ليانا جابر
وائل كشك

الطبعة الأولى التجريبية
٢٠٠٥م/١٤٢٦ هـ

مركز المناهج -حي المصيون-شارع المعاهد-أول شارع على اليمين من جهة مركز المدينة
ص .ب ٧١٩ - رام الله - فلسطين
تلفون ٢٩٦٩٣٥٠-٢-٩٧٠+ فاكس ٢٩٦٩٣٧٧-٢-٩٧٠+
الصفحة الإلكترونية: www.pcdc.edu.ps - العنوان الإلكتروني: pcdc@palnet.com

تمهيد

رأت وزارة التربية والتعليم العالي ضرورة وضع منهاج يراعي الخصوصية الفلسطينية ؛ لتحقيق طموحات الشعب الفلسطيني حتى يأخذ مكانه بين الشعوب. إن بناء منهاج فلسطيني يعد أساساً مهمّاً لبناء السيادة الوطنية للشعب الفلسطيني ، وأساساً لترسيخ القيم والديمقراطية ، وهوحق إنساني ، وأداة تنمية للموارد البشرية المستدامة التي رسختها مبادئ الخطة الخمسية للوزارة.

وتكمن أهمية المنهاج في أنه الوسيلة الرئيسة للتعليم ، التي من خلالها تتحقق أهداف المجتمع ؛ لذا تولي الوزارة عناية خاصة بالكتاب المدرسي ، أحد عناصر المنهاج ؛ لأنه المصدر الوسيط للتعلم ، والأداة الأولى بيد المعلم والطالب ، إضافة إلى غيره من وسائل التعلم : الإنترنت ، والحاسوب ، والثقافة المحلية ، والتعلم الأسري ، وغيرها من الوسائط المساعدة.

أقرت الوزارة هذا العام (٢٠٠٥/ ٢٠٠٦)م تطبيق المرحلة السادسة من خطتها للمنهاج الفلسطيني ، لكتب الصف الأول الثانوي (١١) بفروعه : العلمي ، والعلوم الإنسانية ، والمهني ، والتقني ، بالإضافة إلى تطوير بعض كتب المرحلة الأساسية (١-١٠) ، وسيتبعها كتب منهاج الصف الثاني الثانوي(١٢) في العام القادم ، وبها تكون وزارة التربية والتعليم العالي قد أكملت إعداد جميع الكتب المدرسية للتعليم العام للصفوف(١-١٢) ، وتعمل الوزارة حالياً على توسيع البنية التحتية في مجال الشبكات والتعليم الإلكتروني ، وعمل دراسات تقويمية وتحليلية لمناهج المراحل الثلاث ، في جميع المباحث (أفقياً وعمودياً) ؛ لمواصلة التطوير التربوي ، وتحسين نوعية التعليم الفلسطيني.

وتعد الكتب المدرسية وأدلة المعلم التي أنجزت للصفوف الأحد عشر حتى الآن ، وعددها يقارب ٣٥٠ كتاباً ، ركيزة أساسية في عملية التعليم والتعلم ، بما تشتمل عليه من معارف ومعلومات عُرضت بأسلوب سهل ومنطقي ؛ لتوفير خبرات متنوعة ، تتضمن مؤشرات واضحة ، تتصل بطرائق التدريس ، والوسائل والأنشطة وأساليب التقويم ، وتتلاءم مع مبادئ الخطة الخمسية المذكورة أعلاه.

وتتم مراجعة الكتب وتنقيحها وإثراؤها سنويّاً بمشاركة التربويين والمعلمين والمعلمات الذين يقومون بتدريسها ، وترى الوزارة الطبعات من الأولى إلى الرابعة طبعات تجريبية قابلة للتعديل والتطوير ؛ كي تتلاءم مع التغيرات في التقدم العلمي والتكنولوجي ومهارات الحياة. إن قيمة الكتاب المدرسي الفلسطيني تزداد بمقدار ما يبذل فيه من جهود ، ومن مشاركة أكبر عدد ممكن من المتخصصين في مجال إعداد الكتب المدرسية ، الذين يحدثون تغييراً جوهريّاً في التعليم ، من خلال العمليات الواسعة من المراجعة ، بمنهجية رسخها مركز المناهج في مجالي التأليف والإخراج في طرفي الوطن الذي يعمل على توحيده.

إن وزارة التربية والتعليم العالي لايسعها إلا أن تتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى المؤسسات والمنظمات الدولية ، والدول العربية والصديقة وبخاصة حكومة بلجيكا ؛ لدعمها المالي لمشروع المناهج.

كما أن الوزارة لتفخر بالكفاءات التربوية الوطنية ، التي شاركت في إنجاز هذا العمل الوطني التاريخي من خلال اللجان التربوية ، التي تقوم بإعداد الكتب المدرسية ، وتشكرهم على مشاركتهم بجهودهم المميزة ، كلٌّ حسب موقعه ، وتشمل لجان المناهج الوزارية ، ومركزالمناهج ، والإقرار ، والمؤلفين ، والمحررين ، والمشاركين بورشات العمل ، والمصممين ، والرسامين ، والمراجعين ، والطابعين ، والمشاركين في إثراء الكتب المدرسية من الميدان أثناء التطبيق.

وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج
أيلول ٢٠٠٥ م

مقدمة

الحمد لله رب العالمين وبعد،

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات ولأبنائنا الطلبة الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي/ علوم إنسانية وتجاري وفندقي وفق الخطوط العريضة المعدلة لمبحث الرياضيات ضمن خطة المنهاج الفلسطيني الأول.

لقد اشتمل هذا الجزء على ثلاث وحدات هي: المتتاليات والمتسلسلات، والإحصاء والإحتمال، والرياضيات المالية.

ففي الوحدة الأولى (المتتاليات والمتسلسلات) استخدمنا الأنماط لتقديم مفهوم المتتالية بوجه عام وتم التركيز على المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.

وفي الوحدة الثانية (الإحصاء والإحتمال) قدمنا مراجعة للوسط الحسابي والإنحراف المعياري والإحتمال وقوانينه، وتم التركيز على العلامات المعيارية والمنحنى الطبيعي والإحتمال المشروط ونظرية التجزئة.

وفي الوحدة الثالثة (الرياضيات المالية) قدمنا مراجعة لأنظمة المتباينات الخطية وتم التركيز على البرمجة الخطية والدفعات العادية كتطبيقات عملية تزيد من ثقافة الطلبة وتجعلهم يقدرون الجوانب الوظيفية للرياضيات.

أما من حيث طريقة عرض المحتوى المقرر، فقد حرصنا على تسهيل تقديم المفاهيم الرياضية وعدم اللجوء إلى التعاريف والبراهين الرياضية الدقيقة، والإكتفاء بالأمثلة التوضيحية والأنماط والعدد المناسب من التمارين والمسائل، آخذين بعين الإعتبار عدد الحصص المقررة للمبحث والفروق الفردية الطلبة، واحتياجاتهم المستقبلية.

نقدم الشكر الجزيل لكل الزملاء في الميدان، مشرفين ومشرفات، ومعلمين ومعلمات من جميع المحافظات والذين شاركوا في إثراء الكتاب من خلال مشاركتهم في ورشة العمل التي عقدت في مركزالمناهج برام الله، وتقديم الاقتراحات والتعديلات لما فيه مصلحة الطلبة ومستوى الكتاب مؤكدين على حرصنا أن نتلقى المزيد من الملاحظات والاقتراحات بعد وضع الكتاب موضع التطبيق في مدارسنا الفلسطينية إن شاء الله.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

المحتـويــات

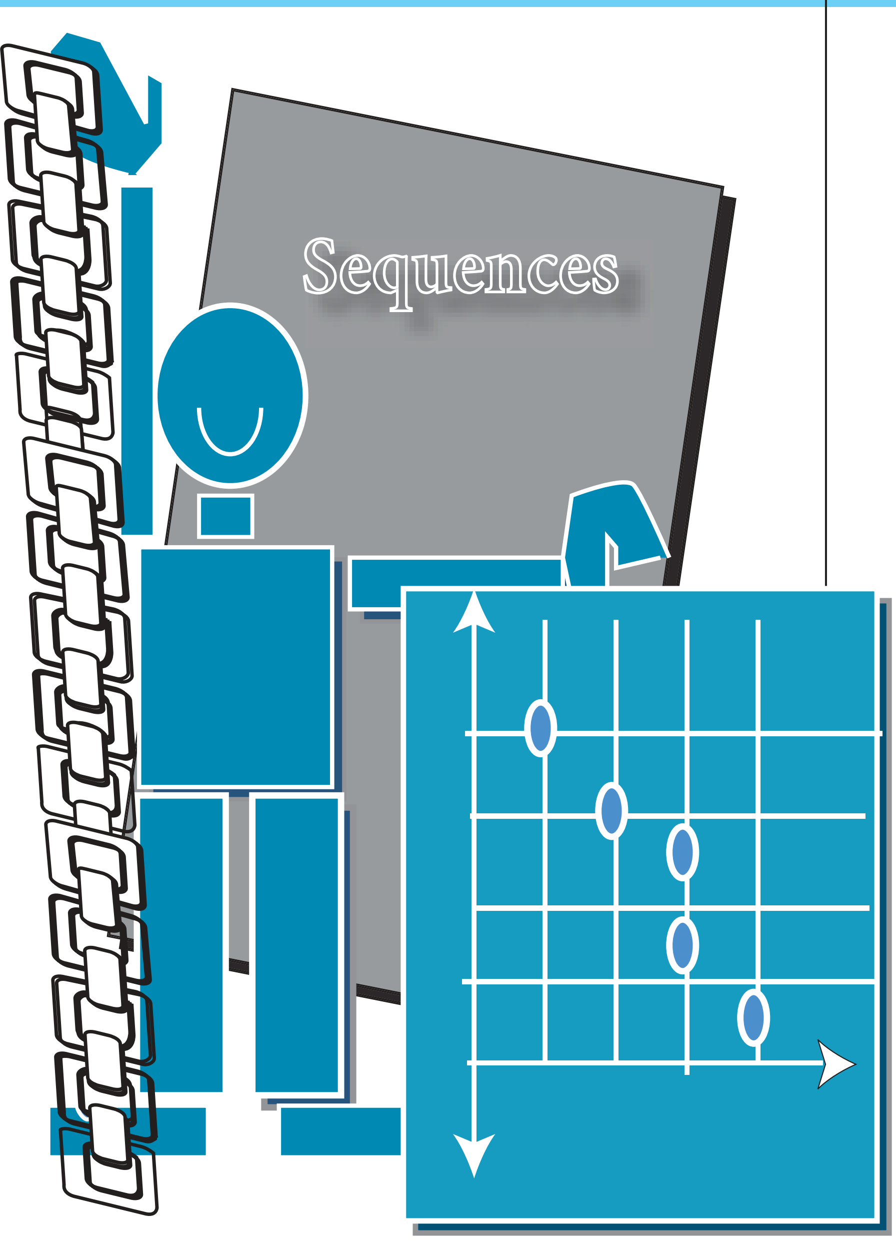
الوحدة الأولى

الوحدة الثانية

الوحدة الثالثة



المتتاليات والمتسلسلات



١-١ المتتاليات (المتتابعات) Sequences

تواجهنا في كثيرٍ من الأحوال أنماط من الأعداد مثل :

(أ) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، . . .

(ب) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، . . .

(جـ) ١٠٠ ، ١٠ ، ١ ، ٠,١ ، . . .

(د) ١٥ ، ١٠ ، ٥ ، ٠ ، . . .

نسمي كلاً من هذه الأنماط متتالية (متتابعة)، ونسمي كل عدد فيها حداً، وترتيب الحد صفة أساسية له ففي المثال (أ) السابق نلاحظ أن العدد ٢ هو الحد الأول في المتتالية ونرمز له بالرمز $ح_١$ ، وأن العدد ٤ هو الحد الثاني فيها ونرمز له بالرمز $ح_٢$ وهكذا . . .

ما ترتيب العدد $\frac{١}{٤}$ في المثال (ب)؟

ما قيمة $ح_٤$ في المثال (جـ)؟

كما نلاحظ أن هناك نسقاً أو نمطاً خاصاً تتعاقب به الحدود بحيث نستطيع الاستمرار بكتابة أي حد من الحدود نشاء في المتتالية الواحدة، فمثلاً $ح_٥$ في المثال (د) هو −٥ ، و $ح_٦$ في المثال (أ) هو ١٢ وهكذا . . .

ما قيمة $ح_٥$ في المثال (جـ)؟

هل العدد $\frac{١}{١٠}$ أحد حدود المتتالية في المثال (ب)؟ لماذا؟

بوجه عام :

المتتالية هي ترتيب من الأعداد وفق نمط أو قاعدة معينة.

مثال (١):

تعاقد موظف للعمل براتب سنوي قدره ٤٠٠٠ دينار على أن يعطى علاوة سنوية قدرها ١٠٠ دينار. فتكون متتالية راتب الموظف السنوي في السنوات الست الأولى من عمله هي : ٤٠٠٠ ، ٤١٠٠ ، ٤٢٠٠ ، ٤٣٠٠، ٤٤٠٠ ، ٤٥٠٠ . الحد الأول في المتتالية = ٤٠٠٠ ، والحد الثاني = ٤١٠٠ ، وحدها السادس = ٤٥٠٠ . ■

مثال (٢):

وافق يوم الجمعة الأولى في عام ٢٠٠٥م الثاني من شهر كانون الثاني (يناير) ، ويريد أحد الطلبة معرفة هل يكون يوم الثامن والعشرون من الشهر نفسه يوم جمعة أيضاً. قام الطالب بترتيب أيام الشهر المقابلة لأيام الجمعة كما يلي :

الجمعة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة
تاريخ اليوم	٢	٩	١٦	٢٣	٣٠

وجد الطالب أن العدد ٢٨ لم يكن حداً من حدود المتتالية : ٢ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٣ ، ٣٠ فاستنتج أن التاريخ المذكور لا يوافق يوم جمعة ، وإنما يوافق يوم أربعاء لأنه يسبق الجمعة الخامسة بيومين. ■

الحد العام للمتتالية: General Term

بوجه عام، تتوالى حدود المتتالية بانتظام أي تكون هذه الحدود وفق نمط أو قاعدة معينة بحيث نستطيع معرفة أي حد في المتتالية إذا عرف ترتيب الحد. الحد الذي ترتبته ن ، حيث ن عدد صحيح موجب ، يسمى الحد النوني أو الحد العام للمتتالية ويرمز له بالرمز $ح_ن$.

مثال (٣): في المتتالية : ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... يكون الحد الرابع هو ٢ x ٤ = ٨ ، والحد السابع هو ٢ x ٧ = ١٤ والحد النوني هو ٢ x ن = ٢ن . أي أن الحد العام هو $ح_ن$ = ٢ن . ■

مثال (٤): أكتب الحد العام للمتتالية : ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... ثم اكتب الحد الثامن فيها.

الحل:

بالنظر الى حدود المتتالية ، تلاحظ أنها عبارة عن مربعات الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ....

فيكون الحد العام للمتتالية $ح_ن = ن^٢$ ويكون $ح_٨ = ٨^٢ = ٦٤$ ■

مثال (٥): أكتب المتتالية التي حدها العام $ح_ن$ = ٢ن + ٣

الحل:

للحصول على حدود المتتالية $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... نعوض قيم ن : ١ ، ٢ ، ٣ ، ... في قانون الحد العام

∴ $ح_١$ = ٢ x ١ + ٣ = ٥ $ح_٢$ = ٢ x ٢ + ٣ = ٧

$ح_٣$ = ٢ x ٣ + ٣ = ٩

وتكون المتتالية هي : ٥ ، ٧ ، ٩ ، .... ■

مثال (٦): متتالية حدها الأول $ح_١ = ١$ ، $ح_{ن+١} = ٢ + ٣ ح_ن$

(أ) صف بالكلمات علاقة أي حد بالحد الذي يسبقه.

(ب) أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية.

الحل:

(أ) القاعدة $ح_{ن+١} = ٢ + ٣ ح_ن$ توضح العلاقة بين كل حد والحد السابق له مباشرة، وتقول بالكلمات إن أي حد في المتتالية يساوي العدد ٢ مضافاً إليه ثلاثة أمثال الحد السابق له مباشرة.

(ب) بتطبيق هذه القاعدة وتعويض ن بالقيم: ١ ، ٢ ، ٣ نجد الحدود: $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ هكذا:

عندما ن = ١ ، $ح_٢ = ٢ + ٣ ح_١ = ٢ + ٣ \times ١ = ٥$

عندما ن = ٢ ، $ح_٣ = ٢ + ٣ ح_٢ = ٢ + ٣ \times ٥ = ١٧$

عندما ن = ٣ ، $ح_٤ = ٢ + ٣ ح_٣ = ٢ + ٣ \times ١٧ = ٥٣$ ▪

مثال (٧): أكتب الحد العام للمتتالية: (٣ + ١) ، (٩ + ١) ، (٢٧ + ١) ، ...

الحل:

نلاحظ أن:

$ح_١ = ٣ + ١ = ٣^١ + ١$

، $ح_٢ = ٩ + ١ = ٣^٢ + ١$

، $ح_٣ = ٢٧ + ١ = ٣^٣ + ١$

⋮

إذن $ح_ن = ٣^ن + ١$. ▪

ملاحظة:

بعض المتتاليات لا تخضع لقاعدة معروفة مثل المتتالية المشهورة وهي متتالية الأعداد الأولية:

٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ...

تمارين ومسائل (١-١)

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتاليات التالية :

(أ) $ح_ن = ٣ن - ١$

(ب) $ح_ن = ن^٢ + ١$

(جـ) $ح_ن = (ن + ١)^٢$

(د) $ح_١ = ٣$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ٥$

٢ أكتب الحد العام للمتتاليات التالية :

(أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...

(ب) ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...

(جـ) ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ...

(د) $\frac{١}{١١}$ ، $\frac{٢}{١٢}$ ، $\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٤}$ ، ...

٣ متتالية حدها العام $ح_ن = ٢ن + ١٥$ ، ومتتالية أخرى حدها العام $ك_ن = ن^٢$. أوجد كلاً من :

(أ) $ح_٣$

(ب) $ك_٤$

(جـ) ما هو الحد الذي له القيمة نفسها في المتتاليتين؟

نشاط إضافي:

١ أكتب الحد العام للمتتالية : ٩ ، ٩٩ ، ٩٩٩ ، ...

٢ اكتشف النمط في المتتالية : ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ... ثم أكتب الحدود الثلاثة التالية.

١-٢ المتسلسلات Series

عرفنا فيما سبق أن المتتالية هي ترتيب من الأعداد وفق نمط أو قاعدة معينة ويفصل بين حدودها الإشارة « ، »
ولكن إذا استبدلنا إشارة « ، » بإشارة الجمع «+» فإن المتتالية تسمى متسلسلة فمثلاً: ٢ ، ٥ ، ٨ ، ... متتالية أما الصورة : ٢ + ٥ + ٨ + ... فتسمى متسلسلة. والمتتالية ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ... ترافقها المتسلسلة :
٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ...

لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة يمكن استخدام الرمز الخاص Σ (ويقرأ سيجما).

فمثلاً المتسلسلة : ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ نكتبها على الصورة :

$$٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} + ٢^{٤} + ٢^{٥} = \sum_{ر=١}^{ر=٥} ٢^{ر}$$

لاحظ أننا كتبنا الحد العام $٢^{ر}$ أمام رمز المجموع وجعلنا الأس ر يتغير من أول قيمة وهي ١ إلى آخر قيمة وهي ٥ بزيادة ١ في كل مرة.

و المتتالية ١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ٥١ التي حدها العام $ح_{ن}$ = ٢ن − ١ تكون المتسلسلة المرافقة لها :

١ + ٣ + ٥ + ٠٠٠٠ + ٥١ وتكتب على الصورة $\sum_{ر=١}^{٢٦} (٢ر - ١)$.

مثال (١): استخدم الرمز Σ لكتابة المتسلسلة : ٥ x ١ + ٥ x ٢ + ٥ x ٣ + . . . + ٥ x ١٠

الحل:

المتسلسلة هي $\sum_{ر=١}^{١٠} ٥ر$ (لماذا؟) ■

مثال (٢): ما مجموع المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٥)$؟

الحل:

لكتابة حدود المتسلسلة ، نعوض قيم ر : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ في الحد العام

مجموع المتسلسلة = (٢ x ١ + ٥) + (٢ x ٢ +٥) + (٢ x ٣ + ٥) + (٢ x ٤ + ٥)

= ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ = ٤٠ ■

تمارين ومسائل (١-٢)

١ أوجد مجموع كل من المتسلسلات التالية :

أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر + ١)$

ب) $\sum_{ر=١}^{٤} ٢^{ر}$

جـ) $\sum_{ك=١}^{٣} \frac{١}{ك}$

د) $\sum_{ر=١}^{٦} (-١)^{ر}$

٢ استخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المتسلسلات التالية :

أ) م + ٢م + ٣م + . . . + ١٠م ، م ثابت

ب) $\frac{٣}{١} + \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٣} + . . . + \frac{٣}{٢٠}$

جـ) ٨ + ١٦ + ٢٤ + . . . + ٨٠

٣ تحقق من أن $\sum_{ر=١}^{٣} ر^{٣} = (\sum_{ر=١}^{٣} ر)^{٢}$

١-٣ المتتاليات الحسابية Arithmetic Sequences

اتفق مقاول أن يحفر بئراً عمقها ٦ أمتارعلى أن يتقاضى مبلغاً قدره ٥٠ ديناراً عن أول متر يحفره، ٧٥ ديناراً عن المتر الثاني، ١٠٠ دينار عن المتر الثالث . . . وهكذا.

يريد صاحب البئر معرفة كم يكلفه حفر المتر السادس من البئر، وكم يكلفه حفر البئر كله.

كتب صاحب البئر الأجرة التي سيدفعها للمقاول عن كل متر يحفره مستخدماً النمط السابق نفسه وهو زيادة منتظمة قدرها ٢٥ ديناراً، فكتب المتتالية : ٥٠ ، ٧٥ ، ١٠٠ ، ١٢٥ ، ١٥٠ ، ١٧٥.

استنتج صاحب البئر أن المتر السادس يكلفه ١٧٥ ديناراً، وأن تكاليف حفر البئر كلها هي :

٥٠ + ٧٥ + ١٠٠ + ١٢٥ + ١٥٠ + ١٧٥ = ٦٧٥ ديناراً .

تسمى المتتالية : ٥٠ ، ٧٥ ، ١٠٠ ، ١٢٥ ، ١٥٠ ، ١٧٥ متتالية حسابية لأن الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت دائماً . وهذه أمثلة أخرى لمتتاليات حسابية للسبب نفسه : ٢٠ ، ١٨ ، ١٦ ، ١٤ ، . . . .

$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $١\frac{١}{٤}$ ، $١\frac{٣}{٤}$ ، . . . .

تعريف:

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً.

يسمى المقدار الثابت أساس المتتالية، ويرمز له عادةً بالرمز د .

مثال (١): ميّز المتتاليات الحسابية من غيرها فيما يلي :

١ ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، . . .

٢ ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، . . . ، $\frac{١}{٢٠}$

٣ متتالية الأعداد الأولية

٤ المتتالية التي حدها العام $ح_ن = ن^٢$

الحل:

١ المتتالية ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، . . . حسابية لأن الفرق بين كل حد و سابقه مقدار ثابت = ٢

٢ المتتالية ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، . . . ، $\frac{١}{٢٠}$ ليست حسابية لأن الفرق بين كل حد وسابقه ليس ثابتاً فمثلاً :

$\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$ ، بينما $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٦}$

٣ متتالية الأعداد الأولية : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ليست حسابية لأن الفرق بين كل حد وسابقه ليس ثابتاً فمثلاً :

٣ − ٢ = ١ ، بينما ٥ − ٣ = ٢ .

٤ المتتالية هي : ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... فهي ليست حسابية لأن ٤ − ١ = ٣، بينما ٩ − ٤ = ٥ ■

الحد العام للمتتالية الحسابية:

لنأخذ المتتالية الحسابية : ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ التي أساسها ٤ ونلاحظ النمط التالي :

الحد الثاني $ح_٢$ = ٧ = ٣ + ١ x ٤ = ٣ + (٢ − ١) x ٤

الحد الثالث $ح_٣$ = ١١ = ٣ + ٢ x ٤ = ٣ + (٣ − ١) x ٤

⋮

الحد السابع $ح_٧$ = ٢٧ = ٣ + ٦ x ٤ = ٣ + (٧ − ١) x ٤

لاحظ أن كل حد = الحد الاول + (رتبة الحد − ١) x الاساس.

وهذا ينطبق أيضاً على الحد الأول (تحقق من ذلك).

بوجه عام: إذا كان الحد الأول لمتتالية حسابية هو أ وأساسها د فإن الحد الثاني = أ + د ، الحد الثالث = أ + ٢د

والحد العاشر = أ + ٩د ، وهكذا . . . ويكون الحد العام (الحد النوني) هو $ح_ن$ = أ + (ن − ١)د

الحد العام لأية متتالية حسابية حدها الأول أ وأساسها د هو $ح_ن$ = أ + (ن−١)د

مثال (٢): أوجد الحد السادس في المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٢ وأساسها ٥ . تحقق بكتابة الحدود الستة الأولى من المتتالية .

الحل:

أ = ٢ ، د = ٥

$ح_ن$ = أ + (ن − ١)د

$ح_٦$ = ٢ + (٦ − ١) x ٥

$ح_٦$ = ٢ + ٥ x ٥ = ٢٧

التحقق : المتتالية هي ٢ ، ٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، (٢٧)

الحد السادس = ٢٧ ، النتيجة صحيحة . ■

مثال (٣): في المتتالية الحسابية : ١ ، ٧ ، ١٣ ، ... أوجد :

١ $ح_{١٠}$

٢ هل العدد ١٢٣ هو أحد حدود المتتالية؟

الحل:

الحد الأول أ = ١ ، الأساس د = ٧ − ١ = ٦

١ $ح_{١٠}$ = أ + ٩د = ١ + ٩ x ٦ = ٥٥

٢ نفرض أن الحد الذي قيمته ١٢٣ هو $ح_ن$ فيكون : $ح_ن$ = ١٢٣ = أ + (ن − ١)د

١٢٣ = ١ + (ن − ١) x ٦

١٢٢ = (ن − ١) x ٦

$ن - ١ = \frac{١٢٢}{٦}$

$\frac{١٢٢}{٦} + ١ = ن \Leftarrow ن = \frac{٦٤}{٣}$

وبما أن قيمة ن ليست عدداً صحيحاً موجباً فإنه لا يوجد حد من حدود المتتالية قيمته ١٢٣. ■

مثال (٤): إذا كان الحد السابع من حدود متتالية حسابية ١٩ والحد الرابع عشر منها ٤٠ .
أكتب المتتالية ثم جد الحد العشرين فيها.

الحل:

$ح_٧$ = ١٩ = أ + ٦د ....(١)

$ح_{١٤}$ = ٤٠ = أ + ١٣د ....(٢)

نحل المعادلتين (١) ، (٢) بالطرح فيكون :

٢١ = ٧د $\Leftarrow$ د = ٣ . نعوض قيمة د = ٣ في إحدى المعادلتين :

١٩ = أ + ٦ x ٣ $\Leftarrow$ أ = ١

أي أن المتتالية : ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ...

$ح_{٢٠}$ = أ + ١٩د = ١ + ١٩ x ٣ = ٥٨ ■

الأوساط الحسابية: Arithmetic Means

إذا أخذنا ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية فإن الحد الأوسط منها يكون وسطاً حسابياً للحدين الآخرين.
ففي المتتالية الحسابية : ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ نلاحظ أن العدد ٩ هو الوسط الحسابي للعددين المجاورين ٥ ، ١٣
لأن ٩ = $\frac{٥ + ١٣}{٢}$ كما أن العدد ١٣ هو الوسط الحسابي للعددين المجاورين له ٩ ، ١٧.

بوجه عام :
يمكن إدخال وسط حسابي بين العددين أ ، ب فيكون هذا الوسط = $\frac{أ + ب}{٢}$ وتشكل الأعداد أ ، $\frac{أ + ب}{٢}$ ، ب متتالية حسابية. وإذا كان أ ، ب عددين فإنه يمكننا ادخال عدة أعداد : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$، ... $س_ن$ بين أ ، ب بحيث تشكل المتتالية الناتجة : أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، .... $س_ن$ ، ب متتالية حسابية. نسمي الأعداد $س_١$ ، $س_٢$ ، .... ، $س_ن$ أوساطاً حسابية بين العددين أ ، ب، لأن كلاً منها يكون وسطاً حسابياً للعددين المجاورين له في المتتالية.

مثال (٥): أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ٤ ، ٢٩ .

الحل:

عند ادخال ٤ أوساط حسابية بين ٤ ، ٢٩ تصبح المتتالية على النحو : ٤ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، ٢٩

وتكون أ = ٤ ، $ح_٦$ = ٢٩

$ح_٦$ = أ + ٥د

٢٩ = ٤ + ٥ x د

٢٥ = ٥د ⟸ د = ٥

تصبح المتتالية الحسابية : ٤ ، ٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ٢٤ ، ٢٩ وتكون الأوساط هي ٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ٢٤ ▪

تمارين ومسائل (١-٣)

١ أي المتتاليات التالية حسابية؟

(أ) $\frac{٢}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...

(ب) ١ $\frac{١}{٢}$ ، ٢ $\frac{١}{٣}$ ، ٣ $\frac{١}{٤}$ ، ٤ $\frac{١}{٥}$ ، ...

(جـ) ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ....

(د) ٣ ، −٣ ، ٣ ، −٣ ، ...

٢ أوجد : (أ) الحد العاشر في المتتالية الحسابية ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ...

(ب) رتبة الحد الذي قيمته ١٤٤ في المتتالية ٤ ، ٩ ، ١٤ ، ... (إن وجد).

٣ إذا كانت : ٤ ، س ، ص ، −٥ حدود متتالية حسابية فجد قيمة كل من س ، ص.

٤ أدخل ٣ أوساط حسابية بين العددين ١٧ ، ١.

٥ إذا كونت الأعداد : ٥ ، ك ، ....، ٣ك ، ٢٣ متتالية حسابية فأوجد :

(أ) قيمة ك.

(ب) عدد حدود المتتالية الحسابية.

٦ بدأ موظف عمله في إحدى الشركات براتب سنوي قدره ٣٦٠٠ دينار ، وأخذ يتقاضى علاوة سنوية ثابتة قدرها ٦٠ ديناراً. بعد كم سنة يصبح الراتب السنوي للموظف ٤٨٠٠ ديناراً ؟

١-٤ مجموع المتسلسلة الحسابية Sum of Arith.Series

في عام ١٧٨٧م طلب معلم من تلاميذه أن يجمعوا جميع الأعداد الصحيحة من ١ إلى ١٠٠ أي ١+ ٢+٣+ ... + ١٠٠ . لم تمض سوى دقائق قليلة حتى فاجأه أحد التلاميذ ويدعى جاوس (وكان آنذاك في الصف الثالث) بأن أعطاه الجواب الصحيح وهو ٥٠٥٠ سأله المعلم مندهشاً كيف حصلت على الجواب؟

كتب جاوس الحل كما يلي :

جـ = ١ + ٢ + ٣ + ... + ١٠٠ ، ثم كتب المجموع نفسه بشكل معكوس هكذا :

جـ = ١٠٠ + ٩٩ + ٩٨ + ... + ١

بالجمع : ٢جـ = ١٠١ + ١٠١ + ١٠١ + ... + ١٠١ (عدد الحدود ١٠٠)

٢جـ = ١٠١ x ١٠٠

جـ = ١٠١ x $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠(١٠١) = ٥٠٥٠

يمكننا استخدام الطريقة التي حسب بها جاوس (الذي أصبح فيما بعد عالماً مشهوراً في الرياضيات) في اشتقاق القاعدة التي تحدد مجموع ن من حدود متسلسلة حسابية ويرمز له بالرمز جـ$_{ن}$ هكذا :

جـ$_{ن}$ = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + ... + ل (ل : الحد الأخير فيها)

جـ$_{ن}$ = ل + (ل − د) + (ل −٢د) + ... + أ

بالجمع ٢جـ$_{ن}$ = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) (ن مرّة)

٢جـ$_{ن}$ = (أ + ل) x ن

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ......(١)

ويمكن كتابة القاعدة (١) بطريقة أخرى حيث ل= ح$_{ن}$= أ + (ن − ١)د

وعليه يكون : جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١)د] = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

قاعدة : مجموع أول ن حد من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول أ وأساسها د هو :

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ....(١)

أو جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د] ....(٢)

مثال (١): أوجد مجموع أول ٢٠ حداً من حدود المتسلسلة : ٣+٨+١٣+...

الحل:

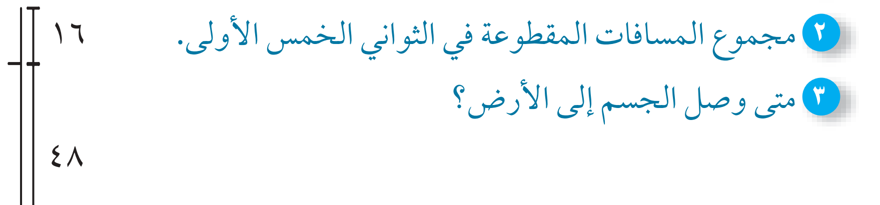
المتسلسلة هي متسلسلة حسابية حدها الأول أ = ٣ ، د = ٥

$$\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}\right]$$

$$\text{ج}_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}\left(٢ \times ٣ + ١٩ \times ٥\right) = ١٠\,(٦ + ٩٥)$$

$$= ١٠ \times ١٠١ = ١٠١٠$$ ▪

مثال (٢): سقط جسم من ارتفاع ١٦٠٠ قدم سقوطاً حراً فقطع مسافة ١٦ قدماً في الثانية الأولى، ٤٨ قدماً في الثانية الثانية، ٨٠ قدماً في الثانية الثالثة... وهكذا.



أوجد : ١ المسافة التي يقطعها الجسم في الثانية السادسة.

٢ مجموع المسافات المقطوعة في الثواني الخمس الأولى.

٣ متى وصل الجسم إلى الأرض؟

الحل:

متتالية المسافات المقطوعة هي: ١٦ ، ٤٨ ، ٨٠ ، ... وهذه متتالية حسابية لأن لها الأساس الثابت ٣٢.

١ المسافة التي قطعها الجسم في الثانية السادسة = $\text{ح}_{٦}$

$\text{ح}_{٦}$ = أ + ٥د = ١٦ + ٥ x ٣٢ = ١٦ + ١٦٠ = ١٧٦ قدماً.

٢ مجموع المسافات المقطوعة في الثواني الخمس الأولى = $\text{ج}_{٥}$

$$\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}\right]$$

$$\text{ج}_{٥} = \frac{٥}{٢}\left(٢ \times ١٦ + ٤ \times ٣٢\right)$$

$$= \frac{٥}{٢}(٣٢ + ١٢٨) = \frac{٥}{٢} \times ١٦٠ = ٤٠٠ \text{ قدم.}$$

٣ نفرض أن الجسم وصل الأرض بعد ن ثانية، فتكون مجموع المسافات المقطوعة في هذا الزمن = ١٦٠٠ .

$$\text{ج}_{\text{ن}} = ١٦٠٠ \Leftarrow \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}\right] = ١٦٠٠$$

$$\frac{\text{ن}}{٢}\left[٢ \times ١٦ + (\text{ن} - ١) \times ٣٢\right] = ١٦٠٠ \Leftarrow \text{ن}\left[١٦ + ١٦(\text{ن} - ١)\right] = ١٦٠٠$$

$$١٦\text{ن}^{٢} = ١٦٠٠ \Leftarrow \text{ن}^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow \text{ن} = ١٠.$$

أي وصل الجسم إلى الأرض بعد ١٠ ثوانٍ من سقوطه. ▪

مثال (٣): إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية يساوي ١٥ وحاصل ضربها يساوي −٥٥ أوجد هذه الأعداد.

الحل:

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي أ ، أ + د ، أ + ٢د على الترتيب

حاصل جمعها = ١٥ ⟸ أ + (أ + د) + (أ + ٢د) = ١٥

٣أ + ٣د = ١٥

وبالقسمة على ٣ ينتج : أ + د = ٥ .... (١)

حاصل ضربها = −٥٥ ⟸ (أ) (أ + د) (أ + ٢د) = −٥٥ .... (٢)

نحل المعادلتين (١) ، (٢) بالتعويض :

من (١) يكون أ = ٥ − د

تصبح المعادلة (٢) : (٥ − د) (٥) (٥ + د) = −٥٥

وبالقسمة على ٥ ينتج : (٥ − د) (٥ + د) = −١١

٢٥ − د^{٢} = −١١

د^{٢} = ٣٦ ومنها د = ±٦

عندما د = ٦ فإن أ = ٥ − ٦

أ = −١ ، وتكون الأعداد المطلوبة هي −١ ، ٥ ، ١١

عندما د = −٦ فإن أ = ٥ + ٦ = ١١ ، وتكون الأعداد المطلوبة هي ١١ ، ٥ ، −١

طريقة أخرى للحل

يمكن حل المثال بطريقة مختصرة إذا اعتبرنا أن الحد الأوسط = أ

فيكون الحد الأول : أ − د ، والحد الثالث : أ + د

فيكون (أ − د) + (أ) + (أ + د) = ١٥

٣أ = ١٥ ⟸ أ = ٥

ويكون (أ − د) (أ) (أ + د) = −٥٥

(٥ − د) (٥) (٥ + د) = −٥٥ (بالقسمة على ٥)

(٥ − د) (٥ + د) = −١١

٢٥ − د^{٢} = −١١ د^{٢} = ٣٦ ، د = ±٦

ونكمل الحل كما في الطريقة الأولى. ▪

تمارين ومسائل (١-٤)

١ أوجد مجموع المتسلسلات الحسابية التالية:

(أ) ٤ + ٧ + ١٠ + ... + ٤٠

(ب) ٢١ + ١٩ + ١٧ + ... + (-٢١)

(جـ) $\sum_{ر=1}^{10}$ (٢ر + ١)

٢ أوجد الحد الأول في المتسلسلة الحسابية التي أساسها ٢ ومجموع أول ٢٠ حداً منها ٨٠.

٣ كم حداً يجب أخذه من المتسلسلة ١١ + ٩ + ٧ + ... ليكون مجموعها ٢٠؟
للمسألة حلان. فسر النتيجة.

٤ أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٥ ، ١٠٠ والتي تقبل القسمه على ٧.

٥ إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية يساوي ١٢ وحاصل ضربها ٢٨ أوجد هذه الأعداد.

٦ بدأ موظفان العمل في شركة: الأول براتب سنوي مقطوع (ثابت) قدره ٦٠٠٠ دينار والثاني براتب سنوي يبدأ بمبلغ ٤٨٠٠ دينار في السنة الأولى ويزداد بمقدار ثابت قدره ١٠٠ دينار في كل سنة تالية.

(أ) بعد كم سنة يتساوى راتبا الموظفين السنويان؟

(ب) بعد كم سنة يكون مجموع ما تقاضاه الموظف الأول مساوياً لمجموع ما تقاضاه الموظف الثاني؟

٧ قاعة اجتماعات في إحدى المدارس فيها عدد من الكراسي مرتبة في ٢٠ صفاً، فإذا كان في الصف الأول ١٠ كراسي وفي الصف الثاني ١٢ كرسياً، وفي الصف الثالث ١٤ كرسياً... وهكذا

(أ) ما عدد الكراسي الموجودة في الصف الثامن من صفوف القاعة؟

(ب) ما مجموع الكراسي في القاعة؟

(جـ) إذا خُصّصت الكراسي في الصفوف الثلاثة الأولى لأعضاء مجلس الآباء والمعلمين، والصفوف الأخرى للطلبة، وكانت جميع مقاعد القاعة مشغولة، فما عدد الطلبة؟

١-٥ المتتاليات الهندسية Geometric Sequences

يراد تعبئة صهريج بالماء. وضع في الصهريج ١م^{٣} من الماء في الساعة الأولى، ٢م^{٣} في الساعة الثانية، ٤م^{٣} في الساعة الثالثة وهكذا... بحيث تكون كمية الماء التي توضع في الصهريج في أية ساعة مساويةً لضعفي كمية الماء التي توضع في الساعة السابقة لها.

نلاحظ أن كميات الماء الموضوع في الصهريج في كل ساعة هي على النحو: ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، . . .

وإذا تأملنا حدود هذه المتتالية نجد أنها ليست متتالية حسابية لأن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس ثابتاً

ولكن نلاحظ أن: ٢ ÷ ١ = ٢ ، ٤ ÷ ٢ = ٢ ، ٨ ÷ ٤ = ٢ ، . . . . .

أي أن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، نسمي هذا النوع من المتتاليات، متتالية هندسية.

لنفس السبب تكون كل من المتتاليات التالية هندسية:

١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، . . .

٢ ، ١٠ ، ٥٠ ، ٢٥٠ ، . . .

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، . . .

تعريف:

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي يكون فيها النسبة بين كل حدٍ والحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة.

النسبة الثابتة تسمى اساس المتتالية الهندسية، ويرمز له بالرمز ر .

الحد العام للمتتالية الهندسية

للتوصل إلى قاعدة الحد العام للمتتالية الهندسية دعنا ندرس المثال التالي:

المتتالية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ... هي متتالية هندسية لأن ٦ ÷ ٢ = ٣ ، ١٨ ÷ ٦ = ٣ فهي نسبة ثابتة .

الحد الأول $ح_{١}$ = ٢

الحد الثاني $ح_{٢}$ = ٦ = ٢ x $٣^{١}$

الحد الثالث $ح_{٣}$ = ١٨ = ٢ x ٩ = ٢ x $٣^{٢}$

الحد الرابع $ح_{٤}$ = ٥٤ = ٢ x ٢٧ = ٢ x $٣^{٣}$ وهكذا ...

لاحظ أن كل حد = الحد الأول x الأساس مرفوعاً إلى أس يقل بمقدار ١ عن ترتيب الحد. وبنفس النمط يكون الحد الخامس = ٢ x $٣^{٤}$ = ١٦٢

بوجه عام:

إذا كان الحد الأول من متتالية هندسية أ وأساسها ر فإن الحد العام للمتتالية الهندسية هو: $ح_{ن}$ = أ$ر^{ن-١}$

مثال (١): متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٢ . أوجد الحد الخامس فيها.

الحل:

أ = ٣ ، ر = ٢ ، $ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$ح_٥ = ٣ \times ٢^٤ = ٣ \times ١٦ = ٤٨$ ▪

مثال (٢): ما ترتيب الحد الذي قيمته ١٢١٥ من حدود المتتالية الهندسية : ٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ..... ؟

الحل:

نفرض أن الحد الذي قيمته ١٢١٥ هو $ح_ن$ حيث أ = ٥ ، ر = ٣

$ح_ن = ١٢١٥ = أ ر^{ن-١}$

$١٢١٥ = ٥ \times ٣^{ن-١}$ (بالقسمة على ٥)

$٢٤٣ = ٣^{ن-١}$

$٣^٥ = ٣^{ن-١} \Leftarrow ن - ١ = ٥$ (لماذا؟)

$\Leftarrow ن = ٦$

الحد الذي قيمته ١٢١٥ هو الحد السادس ▪

مثال (٣): اشترى رجل سيارة بمبلغ ٨٠٠٠ دينار، فإذا كانت قيمة السيارة تنقص كل سنة بمعدل ١٠٪ عن قيمتها في السنة السابقة لها. أوجد قيمة السيارة في نهاية السنة الخامسة من استخدامها.

الحل:

ثمن السيارة في نهاية السنة الأولى $٨٠٠٠ \times \frac{٩٠}{١٠٠} = ٨٠٠٠ \times ٠,٩ = ٧٢٠٠$ دينار.

ثمن السيارة في نهاية السنه الثانية = $٧٢٠٠ \times ٠,٩ = ٦٤٨٠$ دينار.

ثمن السيارة في نهاية السنه الثالثة = $٦٤٨٠ \times ٠,٩ = ٥٨٣٢$ دينار . .... وهكذا

أي أن متتالية اسعار السيارة في نهاية كل سنة هي : ٧٢٠٠ ، ٦٤٨٠ ، ٥٨٣٢ ، ... وهي متتالية هندسية

اساسها ٠,٩ ، وحدها الأول أ = ٧٢٠٠.

قيمة السيارة في نهاية السنة الخامسة = $ح_٥$

$ح_٥ = ٧٢٠٠ \times (٠,٩)^٤ = ٤٧٢٣,٩٢$ دينار. ▪

تمارين ومسائل (١-٥)

١ ميّز المتتاليات الهندسية فيما يلي :

(أ) ١ ، ٠,١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠١ ، ....

(ب) المتتالية التي حدها العام $ح_ن$ = ٧ن + ٥

(جـ) المتتالية التي حدها العام $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

(د) مضاعفات العدد ٢ التي تزيد عن ١ وتقل عن ٤٠.

٢ أوجد ما يلي :

(أ) الحد السادس في المتتالية الهندسية : ١ ، ٣ ، ٩ ، ....

(ب) قيم س في المتتالية الهندسية : $\frac{١}{٧}$ ، س ، ٣٤٣

٣ متتالية هندسية حدها الثالث ٤ وحدها السادس ٢٥٦. أكتب هذه المتتالية.

٤ إذا كانت : ٣ ، أ ، جـ ، ٨١ متتالية هندسية. فأوجد قيمة كلٍ من أ ، جـ.

نشاط إضافي:

إذا كانت : ٦ ، أ ، ب ، جـ ، ٤٨٦ متتالية هندسية ، فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ.

١-٦ مجموع المتسلسلة الهندسية Sum of Geo. Series

سبق أن عرفنا أن المتتالية : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....١٢٨ هي متتالية هندسية اساسها ٢ وأن المتسلسلة المرافقة لها هي ١ + ٢ + ٤ + ٨ + . . . + ١٢٨. إذا أردنا إيجاد قيمة مجموع حدود المتسلسلة فإننا يمكن أن نقوم بما يلي :

نضع جـ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ . . . (١)

وبضرب طرفي المعادلة في العدد ٢ ينتج :

٢جـ = ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨ + ٢٥٦ . . . (٢)

وبطرح المعادلتين ينتج : ٢جـ − جـ = ٢٥٦ − ١ ⟸ جـ = ٢٥٥

بوجه عام : إذا كانت $جـ_ن = أ + أر + أر^٢ + أر^٣ + ... + أر^{ن-١}$ . . .(١)

فإن $رجـ_ن = أر + أر^٢ + أر^٣ + ... + أر^{ن-١} + أر^ن$ . . .(٢)

بطرح المعادلتين ينتج :

$$رجـ_ن - جـ_ن = أر^ن - أ$$

$$جـ_ن (ر - ١) = أ(ر^ن - ١)$$

$$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} \quad \text{حيث } ر \neq ١$$

قاعدة :

مجموع أول ن من حدود متسلسلة هندسية حدها الأول أ وأساسها ر هو :

$$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} \quad \text{حيث } ر \neq ١$$

لاحظ أنه إذا كانت ر = ١ فإننا لا نستطيع تطبيق القاعدة المذكورة أعلاه ولكن المتسلسلة الهندسية تصبح :

أ + أ + أ + ... + أ = ن أ (لماذا؟)

مثال (١): أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من حدود المتسلسلة الهندسية : ٣ + ٦ + ١٢ + ...

الحل:

أ = ٣ ، ر = ٢

$$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$$

$$جـ_٦ = \frac{٣(٢^٦ - ١)}{٢ - ١} = \frac{٣(٦٤ - ١)}{١} = ٣ \times ٦٣ = ١٨٩$$ ■

مثال (٢): أوجد $\sum_{ر=١}^{٤} ٥^{ر}$

الحل:

المتسلسلة هي : $٥^{١} + ٥^{٢} + ٥^{٣} + ٥^{٤}$

أي أنها : ٥ + ٢٥ + ١٢٥ + ٦٢٥ = ٧٨٠ ، ويمكن حساب المجموع باعتبار المتسلسلة متسلسلة هندسية

حدها الاول ٥ واساسها ٥ فيكون مجموعها هو : $جـ_{٤} = \frac{٥(٥^{٤} - ١)}{٥ - ١} = \frac{٥ \times ٦٢٤}{٤} = ٥ \times ١٥٦ = ٧٨٠$ ■

مثال (٣): تتكاثر البكتيريا فتصبح الواحدة اثنتين كل نصف ساعة. فاذا كان عدد البكتيريا في ١ $سم^{٣}$ من الحليب ١٠٠٠٠ بكتيريا في الساعة الخامسة صباحاً . كم يصبح عددها في الساعة التاسعة صباحاً؟

الحل:



عدد البكتيريا في الساعة الخامسة صباحاً = ١٠٠٠٠

عدد البكتيريا في الساعة الخامسة والنصف صباحاً = ٢٠٠٠٠

عدد البكتيريا في الساعة السادسة صباحاً = ٤٠٠٠٠

⋮

وهذه متتالية هندسية حدها الأول أ = ١٠٠٠٠ ، وأساسها ر = ٢

أما عدد حدودها فتناظر الأزمنة : ٥ ، $٥\frac{١}{٢}$ ، ٦ ، $٦\frac{١}{٢}$ ، ٧ ، $٧\frac{١}{٢}$ ، ٨ ، $٨\frac{١}{٢}$ ، ٩

أي أن عدد الحدود = ٩

فيكون الحد التاسع هو $ح_{٩} = أ ر^{ن-١}$

$= ١٠٠٠٠ \times ٢^{٨}$

$= ١٠٠٠٠ \times ٢٥٦$

$= ٢٥٦٠٠٠٠$

عدد البكتيريا في الساعة التاسعة = ٢٥٦٠٠٠٠

لاحظ أن عدد البكتيريا في الساعة التاسعة هو قيمة الحد التاسع في المتتالية الهندسية وليس مجموع أول ٩ حدود من المتسلسلة الهندسية المرافقة . ■

تمارين ومسائل (١-٦)

١ أوجد مجموع أول ٦ حدود من حدود المتسلسلة الهندسية : ١٦ + ٨ + ٤ + . . .

٢ متسلسلة هندسية اساسها = ٢ ومجموع الحدود الخمسة الأولى فيها = ٢٥٥

أوجد حدها الأول.

٣ متسلسلة هندسية حدها الثالث = ٩ وحدها الخامس = ٨١ أوجد مجموع حدودها الخمسة الأولى.

(كم حلاً للمسألة)؟

٤ كان ثمن دونم أرض في مدينة كبيرة ٠٠٠ ١٠٠ ١٠٠ دينار سنة ٢٠٠٠م. فإذا كان سعر الأرض يزداد في تلك المدينة بمقدار ٨٪ سنوياً ، فما ثمن دونم الأرض فيها سنة ٢٠١٠م؟

٥ عدد سكان مدينة ٢٥٠ ألف نسمة . اذا كان هذا العدد يزداد بمعدل ٢٪ سنوياً فما عدد السكان بعد ١٠ سنوات؟

٦ اشترت سيدة سيارة بسعر ١٥ ألف دولار . اذا كانت قيمة السيارة تتناقص بمقدار ٣٠٪ سنوياً، فكم تصبح قيمة السيارة بعد مرور ٥ سنوات؟

نشاط إضافي:

(أ) لديك الأعداد : ٢٥ ، ٥ ، ١ .

١ اثبت أن الأعداد السابقة تشكل متتالية هندسية.

٢ إذا كان س هو الوسط الحسابي للعددين ٢٥ ، ٥

وكان ص هو الوسط الحسابي للعددين ٥ ، ١ فأوجد قيم س ، ص.

٣ ما قيمة $\frac{٢٥}{س} + \frac{١}{ص}$ ؟

(ب) اختر ٣ أعداد أخرى تشكل متتالية هندسية واجب عن الأسئلة السابقة.

تمارين عامة:

١ أكتب المجموع : ٥ + (٥×٣) + (٥×٣^{٢}) + (٥×٣^{٣}) + ... +(٥×٣^{٢٠}) باستخدام الرمز $\sum$.

٢ أوجد مجموع المتسلسلات التالية :

١ $\sum_{ر=١}^{١٠}$ (٣ر − ١)

٢ $\sum_{ر=١}^{٥}$ ٣^{ر}

٣ ١٠٢٤ + ٥١٢ + ٢٥٦ + ... +١٦

٤ ٤ + ١٢ + ٣٦ + ... + ٩٧٢

٣ متتالية حسابية حدودها ٦٣ ، ٢س ، .... ، ٣٣، س . أوجد قيمة س ثم احسب مجموع حدودها.

٤ حسب سمير مجموع أول ٥٠ عدداً زوجياً موجباً، وحسب محمد مجموع أول ٥٠ عدداً فردياً موجباً. فوجدا أن الفرق بين المجموعين ٥٠ . وضح ذلك .

٥ متتالية حسابية حدها الأول أ وأساسها د ، فإذا كان أ + د = ١
جـ$_{١٠}$=١٥٠ . أوجد قيم أ ، د.

٦ ثلاثة اعداد تكون متتالية حسابية مجموعها ٩ وإذا أضيف الى الحد الثالث ٤ أصبحت المتاليه الناتجة هندسية. أوجد الأعداد الثلاثة.

نشاط إضافي:

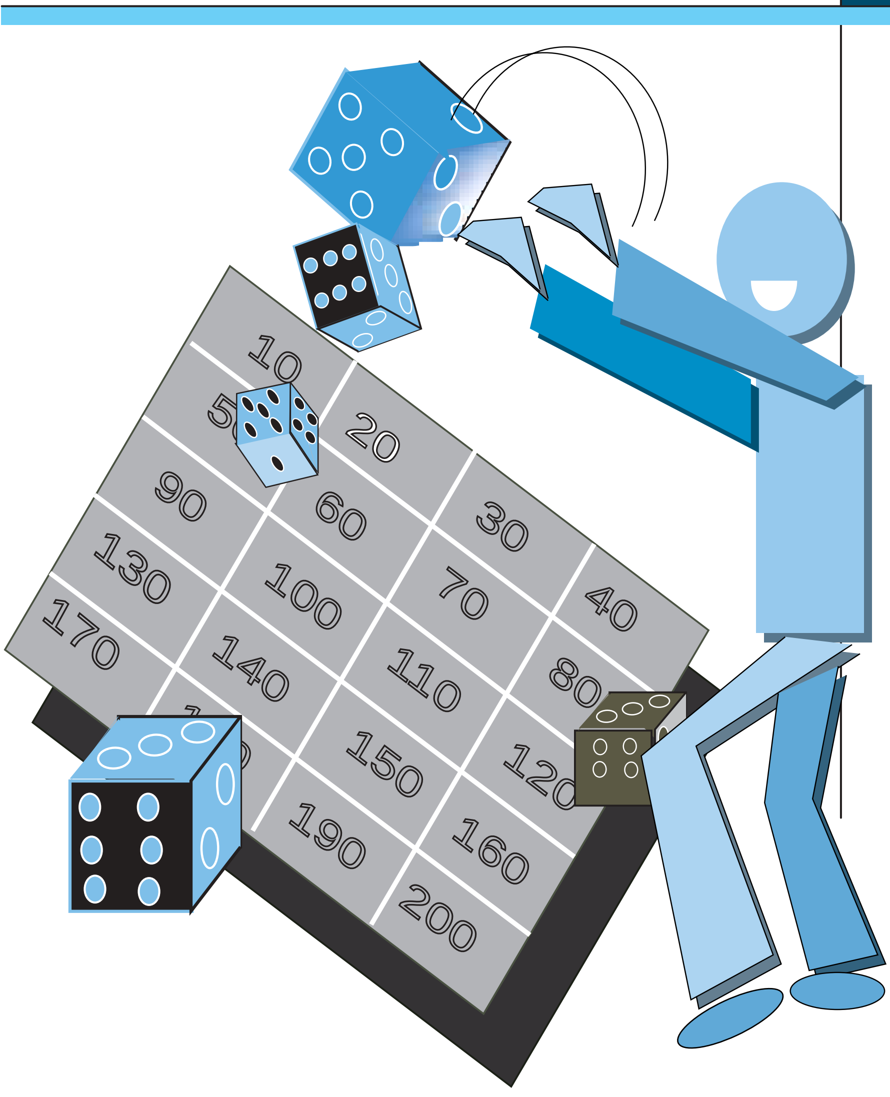
لديك المتسلسلة : $(١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + ... + (\frac{١}{٢٠} - \frac{١}{٢١})$

أ هل المتسلسلة حسابية أم هندسية أم غير ذلك؟

ب أوجد مجموع حدودها.



الإحصاء والإحتمال



٢-١ العلامة المعيارية Standard Score (z-score)

تمهيد - مراجعة الوسط الحسابي والإنحراف المعياري

درست في المرحلة الأساسية مقاييس مختلفة للنزعة المركزية من أهمها الوسط الحسابي، ودرست أيضاً مقاييس مختلفة للتشتت من أهمها الإنحراف المعياري .

فإذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . . ، $س_ن$ مجموعة من القيم فإن :

$$\text{الوسط الحسابي للقيم} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \frac{س_١ + س_٢ + \ldots\ldots + س_ن}{ن}$$

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$$

الإنحراف المعياري للقيم = الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن}}$$

مثال (١): أوجد الوسط الحسابي والإنحراف المعياري للمفردات :

٨ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ٢٠

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي} (\bar{س}) = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{٨ + ١٢ + ١٤ + ١٦ + ٢٠}{٥}$$

$$= \frac{٧٠}{٥} = ١٤$$

لإيجاد الانحراف المعياري ننشىء جدولاً كالآتي :

المفردات (س)	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
٨	٦-	٣٦
١٢	٢-	٤
١٤	٠	٠
١٦	٢	٤
٢٠	٦	٣٦
المجموع	٠	٨٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٠}{٥}}$$

$$= \sqrt{١٦}$$

$$= ٤$$

تدريب

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمفردات :

١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ .

مفهوم العلامة المعيارية

نحتاج كثيراً إلى إجراء مقارنة بين قيمتين مأخوذتين من مجموعتين إحصائيتين مختلفتين ، فمثلاً إذا حصل طالب في أحد الصفوف على العلامة ٧٠ في امتحان اللغة الانجليزية ، وحصل على العلامة ٨٠ في امتحان اللغة العربية ، ففي أي المبحثين كان مستوى تحصيل الطالب أفضل؟

قد تكون الإجابة المباشرة أن مستوى تحصيل الطالب في اللغة العربية أفضل لأن علامته فيها أكبر ، لكن هذه الإجابة لا تستند إلى أية معلومات حول خواص مجموعة العلامات التي تنتمي إليها كل من العلامتين المذكورتين .

فإذا فرضنا أن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات الطلاب في اللغة الإنجليزية هما ٦٠ ، ٥ على الترتيب ، وكان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات الطلاب في اللغة العربية هما ٧٥ ، ١٠ على الترتيب ، فإننا في هذه الحالة نجد أن علامة الطالب في اللغة الإنجليزية وهي ٧٠ تزيد عن الوسط الحسابي لعلامات الصف بمقدار ١٠ علامات . هل هذه الزيادة كبيرة أم صغيرة؟ إن الانحراف المعياري هو مقياس للتشتت وبالتالي إذا استخدمنا هذا المقياس فإن الزيادة ١٠ علامات تعني ١٠ ÷ ٥ = ٢ أي انحرافين معياريين .

بينما علامة الطالب في اللغة العربية وهي ٨٠ تزيد عن الوسط الحسابي لعلامات الصف بمقدار ٥ علامات وهذه الزيادة تمثل ٥ ÷ ١٠ = $\frac{١}{٢}$ أي نصف انحراف معياري ، وهذا يعني أن مستوى الطالب (أي موقع الطالب بالنسبة لباقي طلاب صفه) في اللغة الإنجليزية أفضل منه في اللغة العربية ، لأن موقعه فوق الوسط في اللغة الإنجليزية أعلى من موقعه فوق الوسط في اللغة العربية .

وعلى هذا الأساس نرى أن العلامات الأصلية (الخام) علامات ليست ذات معنى بمفردها ، ومن أجل تفسيرها أوالحكم عليها من حيث أنها تمثل مستوى عالياً أو منخفضاً في المجموعة الإحصائية التي تنتمي إليها لابد من معرفة الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجموعة ، ومن هنا نشأت فكرة القيمة أو العلامة المعيارية .

تعريف:

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة الخام (س) في مجموعة إحصائية وسطها الحسابي $\overline{س}$ وانحرافها المعياري σ هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها العلامة الخام عن الوسط الحسابي للمجموعة . وتعطى بالقاعدة : ع = $\frac{س - \overline{س}}{\sigma}$

مثال (٢): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات ٤٠ طالباً يساوي ٧٦ والانحراف المعياري يساوي ١٠ ، ما العلامة المعيارية المناظرة لكل من العلامتين ٩١ ، ٦٦؟

الحل:

العلامة المعيارية ع $= \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$

العلامة المعيارية المقابلة للعلامة ٩١ $= \frac{٩١ - ٧٦}{١٠} = \frac{١٥}{١٠} = ١,٥$

أي أن العلامة ٩١ تزيد عن الوسط الحسابي لعلامات الصف بمقدار ١,٥ انحراف معياري .

العلامة المعيارية المقابلة للعلامة ٦٦ $= \frac{٦٦ - ٧٦}{١٠} = \frac{-١٠}{١٠} = -١$

أي أن العلامة ٦٦ تقل عن الوسط الحسابي لعلامات الصف بمقدار انحراف معياري واحد . ■

خصائص العلامات المعيارية

١ اشارة العلامة المعيارية :

حيث إن العلامة المعيارية (ع) تمثل الفرق بين العلامة الخام (س) والوسط الحسابي ($\overline{س}$) بوحدات الانحراف المعياري ، فإن العلامة المعيارية(ع) تكون موجبة إذا كانت العلامة الخام أكبر من الوسط الحسابي وتكون سالبة إذا كانت العلامة الخام أصغر من الوسط الحسابي ، وتكون صفراً إذا كانت العلامة الخام تساوي الوسط الحسابي .

٢ الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات المعيارية :

إذا حولت جميع العلامات الخام في توزيع ما إلى علامات معيارية مقابلة فإنه يمكن إثبات أن :

أ) الوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية = صفراً (وهذا يعني أيضاً أن مجموع جميع العلامات المعيارية = صفراً)

ب) الانحراف المعياري لجميع العلامات المعيارية =١

المثال التالي يوضح صحة هاتين الحقيقتين :

مثال (٣): الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات : ٦٠ ، ٧٠ ، ٧٥ ، ٨٠ ، ٩٠ هما ٧٥، ١٠ على الترتيب . وضّح أن الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات المعيارية المناظرة هما ٠ ، ١ على الترتيب .

الحل:

نحوّل العلامات الخام إلى علامات معيارية حيث العلامة المعياريه ع $= \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$.

الجدول الآتي يبين العلامة الخام (س) والعلامة المعيارية المقابلة(ع) . تحقق من ذلك :

س	٦٠	٧٠	٧٥	٨٠	٩٠
ع	−١,٥	−٠,٥	٠	٠,٥	١,٥

الوسط الحسابي للعلامات المعيارية $\bar{ع}$ = $\frac{\text{مجموعة العلامات المعيارية}}{\text{عددها}}$

$$= \frac{\sum ع}{ن} = \frac{-١,٥ + -٠,٥ + ٠ + ٠,٥ + ١,٥}{٥} = \frac{\text{صفر}}{٥} = \text{صفر}$$

ولإيجاد الانحراف المعياري للعلامات المعيارية ننشئ جدولاً كالآتي :

العلامة المعيارية (ع)	ع ـ $\bar{ع}$	$(ع - \bar{ع})^٢$
−١,٥	−١,٥	٢,٢٥
−٠,٥	−٠,٥	٠,٢٥
٠	٠	٠
٠,٥	٠,٥	٠,٢٥
١,٥	١,٥	٢,٢٥
المجموع	٠	٥

الانحراف المعياري = الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات العلامات عن وسطها الحسابي .

$$= \sqrt{\frac{\sum(ع - \bar{ع})^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{٥}{٥}} = \sqrt{١} = ١$$ ■

مثال(٤): حُوِّلت المفردات في مجموعة مكونة من (٦) قيم إلى علامات (قيم) معيارية فكانت النتيجة كالآتي :
−٠,٥ ، −١,٥ ، ٠ ، ١ ، ٠,٥ ، أ . ما قيمة أ ؟

الحل:

مجموع العلامات المعيارية في أي توزيع = صفر

إذن (−٠,٥) + (−١,٥) + ٠ + ١ + ٠,٥ + أ = صفر

−٠,٥ + أ = صفر

⟸ أ = ٠,٥ ■

٣ **تأثر العلامات المعيارية بتغير العلامات الخام .**

(أ) لا تتأثر العلامات المعيارية إذا أضيف مقدار ثابت مثل أ لكل علامة من العلامات الخام الأصلية .

(ب) لا تتأثر العلامات المعيارية إذا ضربت كل علامة خام بمقدار ثابت مثل ب حيث ب عدد موجب ، وتتغير إشارة العلامة المعيارية فقط إذا ضربت كل علامة خام بمقدار ثابت ب حيث ب عدد سالب .

مثال (٥): أجرى معلم اختباراً لطلابه فكان الوسط الحسابي للعلامات يساوي ٥ والانحراف المعياري يساوي ١,٥ (العلامة الكاملة تساوي ١٠) .

١ ما العلامة المعيارية لطالب كانت علامته في الاختبار ٦؟

٢ كم تصبح العلامة المعيارية للطالب في كلٍ من الحالتين الآتيتين :

(أ) إذا أضاف المعلم علامتين لكل طالب في الصف؟

(ب) إذا ضرب المعلم علامة كل طالب في ١٠؟

الحل:

١ العلامة المعيارية ع = $\frac{س - \overline{س}}{\sigma}$

$= \frac{٦ - ٥}{١,٥} = \frac{١}{١,٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

٢ (أ) علامة الطالب الخام الجديدة = ٦ + ٢ = ٨

الوسط الحسابي الجديد لعلامات الطلاب = ٥ + ٢ = ٧ (لأن الوسط يتأثر بنفس الاضافة) .

الانحراف المعياري الجديد لعلامات الطلاب هو نفسه ١,٥ لأنه لا يتأثر بالاضافة .

علامة الطالب المعيارية الجديدة = $\frac{٨ - ٧}{١,٥} = \frac{١}{١,٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

أي أن العلامة المعيارية الجديدة لم تتأثر بالإضافة .

(ب) علامة الطالب الخام الجديدة = ٦ X ١٠ = ٦٠

الوسط الحسابي الجديد للعلامات الخام = ٥X١٠ = ٥٠ لأن الوسط يتأثر بنفس عامل الضرب .

الانحراف المعياري الجديد للعلامات الخام ١,٥ X ١٠ = ١٥ لأن الانحراف المعياري يتأثر بنفس عامل الضرب الموجب .

علامة الطالب المعيارية الجديدة = $\frac{٦٠ - ٥٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

أي أن العلامة المعيارية لم تتأثر بالضرب بعدد موجب . ■

مثال(٦): أجرى معلم الرياضيات اختباراً لطلابه في أحد الصفوف فكان الوسط الحسابي للعلامات ٦٨ والانحراف المعياري ٨ . سمير أحد طلاب الصف وكانت علامته في الاختبار ٨٠ .

(أ) ما علامة سمير المعيارية؟

(ب) إذا أضاف المعلم ٥ علامات لكل طالب في الصف . كم تصبح علامة سمير وكم تصبح علامته المعيارية؟

الحل:

(أ) $ع = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$

علامة سمير المعيارية $= \frac{٨٠ - ٦٨}{٨} = \frac{١٢}{٨} = ١,٥$

(ب) تصبح علامة سمير بعد الإضافة : ٨٠ + ٥ = ٨٥

وحيث إن إضافة مقدار ثابت لكل علامة خام لا يغير من العلامة المعيارية المقابله إذن علامة سمير المعيارية بعد الإضافة هي نفسها قبل الاضافه أي ١,٥ . ■

مثال(٧): إذا كانت العلامتان ٤٤ ، ٨٤ تقابلهما العلامتان المعياريتان –٢ ، ٣ على الترتيب .

ما هو الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لتوزيع العلامات الأصلية؟

الحل:

$ع = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$

إذن : $-٢ = \frac{٤٤ - \overline{س}}{\sigma}$ وبالضرب التبادلي : $٤٤ - \overline{س} = -٢\sigma$ ......(١)

$٣ = \frac{٨٤ - \overline{س}}{\sigma}$

وبالضرب التبادلي : $٨٤ - \overline{س} = ٣\sigma$ ....(٢)

نحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف :

$٤٤ - \overline{س} = -٢\sigma$

$\underline{٨٤ - \overline{س} = ٣\sigma}$

بالطرح $-٤٠ = -٥\sigma$

$\sigma = \frac{-٤٠}{-٥} = ٨$

وبالتعويض في احدى المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن $\overline{س} = ٦٠$

إذن الوسط الحسابي = ٦٠ والانحراف المعياري = ٨ ■

تمارين ومسائل (٢-١)

١ توزيع تكراري وسطه الحسابي يساوي ٥٦ وانحرافه المعياري يساوي ١٠.
ما هي القيم (العلامات) المعيارية المناظرة لكلٍ من القيم (العلامات) الخام الآتية؟
٤٠، ٥٦ ، ٧٠

٢ الوسط الحسابي لمجموعة من الأطوال يساوي ١٦٨ سم والانحراف المعياري لها يساوي ١٠ سم.
ما هو الطول الذي تقابله القيمة المعيارية ١,٢؟

٣ في امتحان الإحصاء النهائي، كان الوسط الحسابي للعلامات يساوي ٧٨ والانحراف المعياري للعلامات يساوي ١٠ .

١ ما هما العلامتان المعياريتان لطالبين حصلا على العلامتين ٩٣ ، ٦٢ على الترتيب؟
٢ ما هما العلامتان الخام لطالبين حصلا على العلامتين المعياريتين -٠,٦ ، ١,٤ على الترتيب؟

٤ كانت علامات طالب في ثلاثة مباحث كما هي في الجدول الآتي:

المبحث	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	علامة الطالب
اللغة العربية	٨٢	٦	٧٠
الرياضيات	٦٤	١٠	٦٨
الاقتصاد	٧٦	٨	٨٠

١ ما هي علامات الطالب المعيارية في المباحث الثلاثة؟
٢ في أي المباحث الثلاثة كان مستوى تحصيل الطالب بالنسبه لطلاب صفه هو الأعلى؟

٥ حوّلت المفردات في مجموعة إحصائية إلى علامات معيارية فكانت كالآتي: -١,٥ ، -١ ، ١ ، ٠ ، -٠,٥ ، أ ، ٣أ . ما قيمة أ؟

٦ إذا كانت علامتا طالبين في امتحان التكنولوجيا ٧٠ ، ٨٨ وكانت علاماتهما المعياريتان المناظرتان -٠,٨ ، ١ على الترتيب. ما هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في الامتحان؟

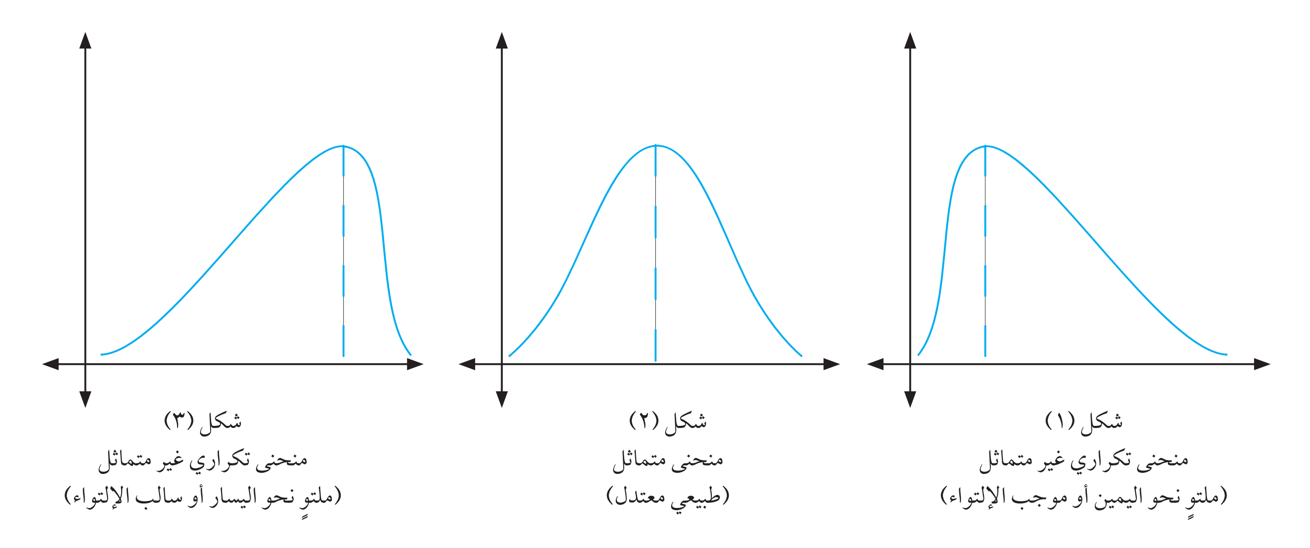
٧ الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من القيم هما ٧٢ ، ٩ على الترتيب.

١ ما هي العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٥٤؟
٢ حوّلت القيم الخام حسب العلاقة ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢٠ حيث س العلامة الخام قبل التحويل، ص العلامة الخام بعد التحويل. كم تصبح العلامة المعيارية للقيمة ٥٤ بعد هذا التحويل؟

٢-٢ المنحنى الطبيعي المعتدل Normal Curve

تعلمت سابقاً طرقاً بيانية مختلفه لتمثيل الجداول التكرارية منها المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري .

ويتخذ المنحنى التكراري أشكالاً مختلفة من أهمها الأشكال الآتية :



شكل (١) منحنى تكراري غير متماثل (ملتوٍ نحو اليمين أو موجب الإلتواء)

شكل (٢) منحنى متماثل (طبيعي معتدل)

شكل (٣) منحنى تكراري غير متماثل (ملتوٍ نحو اليسار أو سالب الإلتواء)

يمثل شكل (١) الحالة التي تتركز فيها معظم القيم في الطرف الأيمن من المنحنى أي نحو القيم الكبيرة في التوزيع .

ويمثل شكل (٣) الحالة التي تتركز فيها معظم القيم في الطرف الأيسر من المنحنى أي نحو القيم الصغيرة في التوزيع .

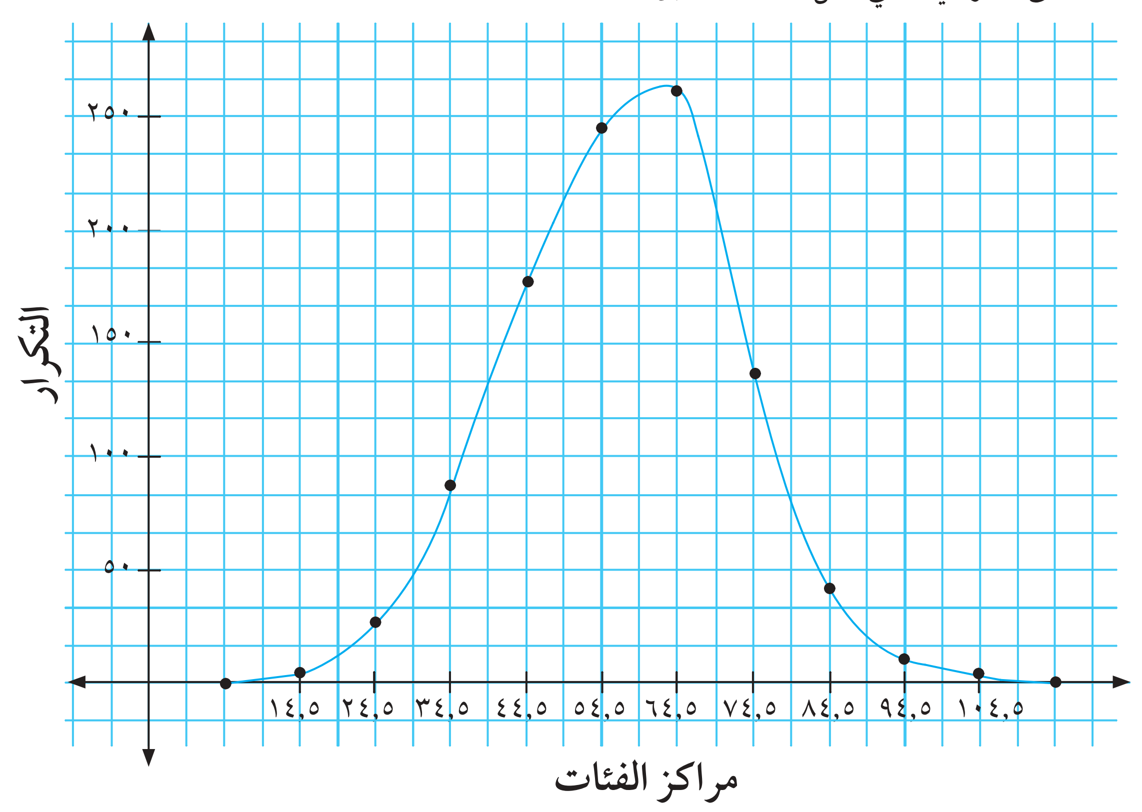
أما شكل (٢) فيمثل الحالة التي تتركز فيها معظم القيم في وسط التوزيع وأما القيم المتطرفه البعيدة عن الوسط من الجهتين اليمنى واليسرى فتكون قليلة ونادرة .

إن المنحنى في شكل (٢) يسمى المنحنى الطبيعي أو المعتدل وهو الصورة النموذجية التي تقترب منها منحنيات كثير من التوزيعات في الحياة العملية مثل الأطوال والأوزان والعلامات ونسب الذكاء وذلك عندما يزداد عدد المفردات التي نقوم بدراستها في كل حالة زيادة كبيرة جداً. لاحظ مثلاً الجدول التالي وتمثيله بيانياً بالمنحنى التكراري .

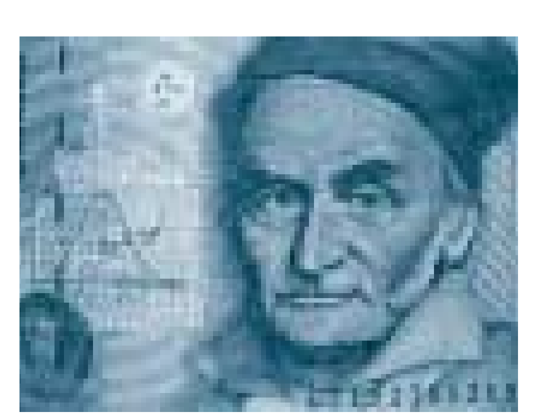
الجدول التكراري لتوزيع أوزان ١٠٠٠ شخص (لأقرب كغم) .

الفئات	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-٩٩	١٠٠-١٠٩
التكرار	٦	٢٨	٨٨	١٨٠	٢٤٧	٢٦٠	١٣٣	٤٢	١١	٥

والمنحنى التكراري التالي يمثل الجدول السابق :



خصائص المنحنى الطبيعي:



لأهمية هذا المنحنى، قام كثير من العلماء مثل ديموافر، ولابلاس، وجاوس في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر بدراسته واكتشفوا الكثير من خواصه ويُعزى إلى العالم الألماني جاوس (١٧٧٧ -١٨٥٥م) الوصول إلى المعادلة الرياضية للمنحنى وترى في الصورة العالم جاوس على عملة المانية مرسوم عليها المنحنى الطبيعي ومعادلته .

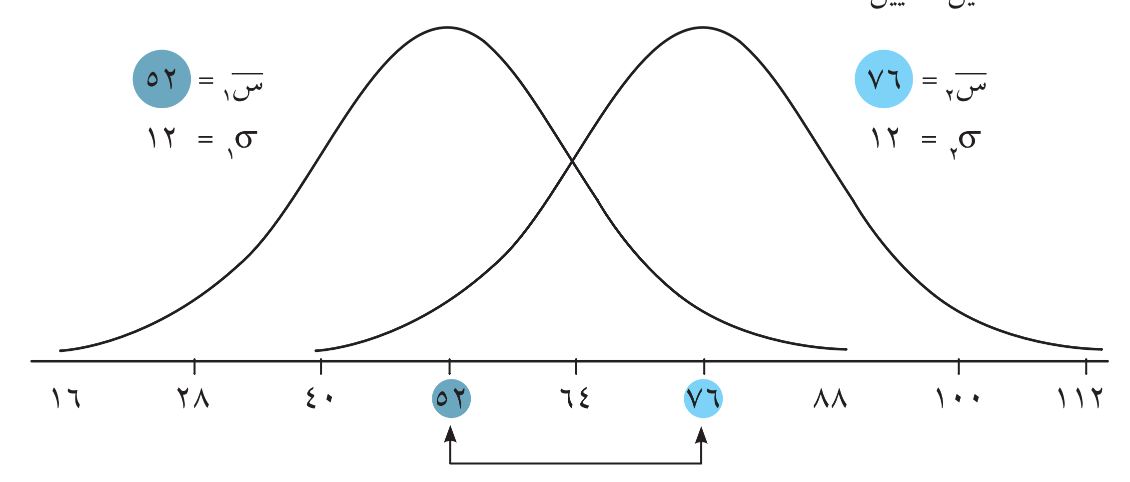
خواص المنحنى:

١ منحنى متماثل له قمة واحدة فقط ونقطة التقاء محور التماثل مع المحور الأفقي تمثل الوسط الحسابي للتوزيع .

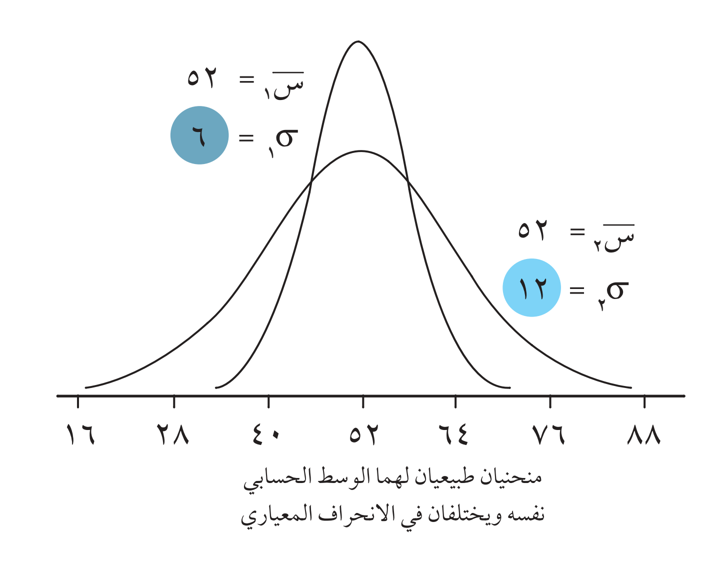
٢ للمنحنى شكل يشبه شكل الجرس فهو يحتوي على عدد كبير من المفردات في الوسط ثم تقل هذه المفردات تدريجياً على الجانبين وبشكل متماثل .

٣ يقترب طرفا المنحنى من المحور الأفقي دون أن يقطعاه أي أن طرفي المنحنى يمتدان نظرياً إلى ما لا نهاية من كلا الاتجاهين.

٤ يتخذ المنحنى الطبيعي أشكالاً مختلفه ويتوقف ذلك على الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع فمثلاً لاحظ الشكلين الآتيين:



منحنيان طبيعيان لهما الانحراف المعياري نفسه ويختلفان في الوسط الحسابي



منحنيان طبيعيان لهما الوسط الحسابي نفسه ويختلفان في الانحراف المعياري

٥ تتوزع المفردات التي تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بحيث:

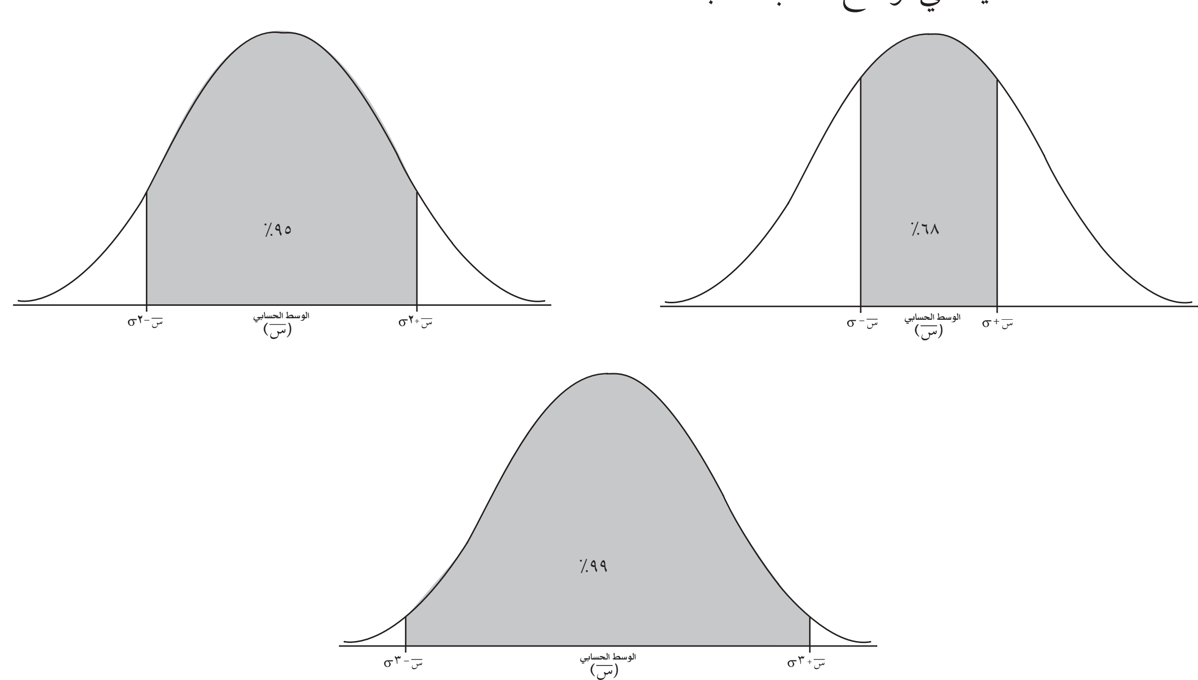
أ) حوالي ٦٨٪ من الحالات (أي من الأطوال أو الأوزان أو العلامات . . . إلخ) تقع ضمن انحراف معياري واحد على جانبي الوسط، أي تقع بين القيمة التي تقل عن الوسط الحسابي للتوزيع بمقدار انحراف معياري واحد وبين القيمة التي تزيد عن الوسط الحسابي للتوزيع بمقدار انحراف معياري واحد.

ب) حوالي ٩٥٪ من الحالات تقع ضمن انحرافين معياريين على جانبي الوسط، أي تقع بين القيمة التي تقل عن

الوسط الحسابي للتوزيع بمقدار انحرافين معياريين وبين القيمة التي تزيد عن الوسط الحسابي للتوزيع بمقدار انحرافين معياريين .

(جـ) وحوالي ٩٩٪ من الحالات تقع ضمن ثلاثة انحرافات معيارية على جانبي الوسط ، أي تقع بين القيمة التي تقل عن الوسط بمقدار ٣ انحرافات معيارية ، وبين القيمة التي تزيد عن الوسط الحسابي للتوزيع بمقدار ٣ انحرافات معيارية .

لاحظ الأشكال الآتية التي توضح النسب السابقة .



وكمثال تطبيقي وبالعودة إلى الجدول التكراري لتوزيع أوزان ١٠٠٠ شخص الذي مر ذكره سابقاً صفحة ٣٢ وعلماً بأن الوسط الحسابي للتوزيع يساوي ٥٧ كغم وأن الإنحراف المعياري يساوي ١٥كغم فإن :

(١) ٦٨٪ تقريباً من الأشخاص أي حوالي ٦٨٠ شخصاً تكون أوزانهم محصورة بين $\overline{س}$ − σ ، $\overline{س}$ + σ أي بين ٥٧ − ١٥ ، ٥٧ + ١٥ أي بين الوزنين ٤٢ ، ٧٢ كغم .

(٢) حوالي ٩٥٪ من الأشخاص أي حوالي ٩٥٠ شخصاً تكون أوزانهم محصورة بين $\overline{س}$ − ٢σ ، $\overline{س}$ +٢σ ، أي بين ٥٧− ٢ X ١٥ ، ٥٧ + ٢ X ١٥ أي بين الوزنين ٢٧ ، ٨٧ كغم .

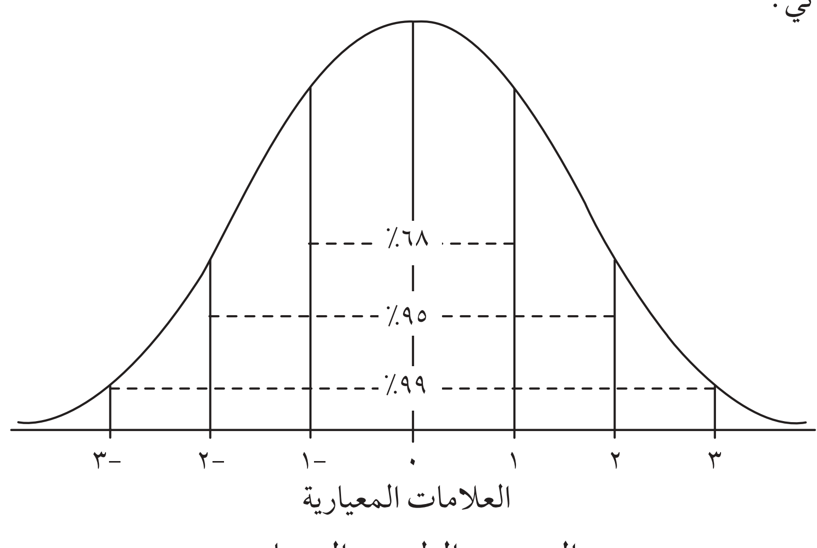
(٣) حوالي ٩٩٪ من الأشخاص أي حوالي ٩٩٠ شخصاً تكون أوزانهم محصورة بين $\overline{س}$ − ٣ σ ، $\overline{س}$ + ٣ σ أي بين ٥٧−٣ X ١٥ ، ٥٧ + ٣ X ١٥ أي بين الوزنين ١٢ ، ١٠٢ كغم .

ويمكن التحقق من مدى توافق هذه النسب والأعداد مع المعطيات الواردة في الجدول المذكور .

المنحنى الطبيعي المعياري:

علمنا أن المنحنى الطبيعي يتخذ أشكالاً متعددة تبعاً للوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع الذي نحن بصدده، ولا شك أن الحصول على منحنى موحد لجميع التوزيعات الطبيعية هو أمر مرغوب فيه، ويمكننا تحقيق هذا الهدف باستخدام العلامات (القيم) المعيارية بدلاً من القيم الخام في التوزيع الطبيعي، إذ أن الوسط الحسابي للعلامات المعيارية في أي توزيع طبيعي يساوي صفراً والانحراف المعياري يساوي واحداً ويسمى المنحنى الطبيعي الناتج المنحنى الطبيعي المعياري .

لاحظ الشكل الآتي :



المنحنى الطبيعي المعياري

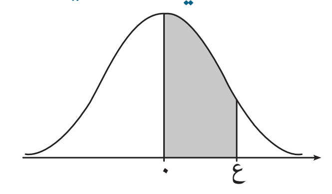
جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي ١ ، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيم معينة من العلامات المعيارية .

وهذه الجداول لا تتخذ صيغة واحدة في جميع الكتب والمراجع وسنعتمد الجدول الملحق في نهاية الكتاب والذي يُعطي المساحة المحصورة بين الوسط الحسابي والعلامة المعيارية ع حيث ع عدد موجب أي مثل المساحة المظللة في الشكل المجاور، أما لقيم ع السالبة فنستخدم صفة التماثل في المنحنى كما سيتضح في الأمثلة القادمة .

المقطع على الصفحة التالية جزء من الجدول المذكور ويبين المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري لقيم ع = ٠ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٢ ، ٠,٠٣ ، . . . ، ١,٤٩ .

المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين صفر ، ع الموجبة



ع	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٤
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٨	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٨	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١٢	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٦	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٧٢٥	٠,٣٧٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩

مثال(١): أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والمحصورة بين ع = ٠ ، ع = ١,١٥ .

الحل:

نقرأ المساحة مباشرة من الجدول فننظر إلى العدد الواقع عند تقاطع الصف ع = ١,١ والعمود ٥

(أي ٠,٠٥)، لنجد العدد ٠,٣٧٤٩

المساحة المطلوبة هي ٠,٣٧٤٩ ■

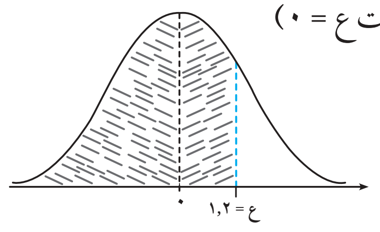
مثال(٢): أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والواقعة تحت ع = ١,٢ .

الحل:

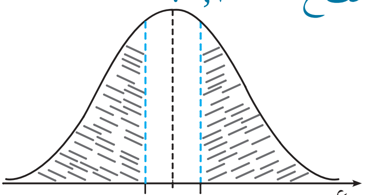
المساحة المطلوبة = (المساحة بين ع = ٠ ، ع = ١,٢) + (المساحة تحت ع = ٠)

= ٠,٣٨٤٩ + ٠,٥

= ٠,٨٨٤٩ ■



مثال(٣): أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والواقعة تحت ع = −٠,٧٥ .



الحل:

المساحة تحت ع = −٠,٧٥ تساوي المساحة فوق ع = ٠,٧٥

لاحظ الشكل المجاور .

المساحة فوق (ع = ٠,٧٥) = ٠,٥ − (المساحة بين ع = ٠ ، ع =٠,٧٥)

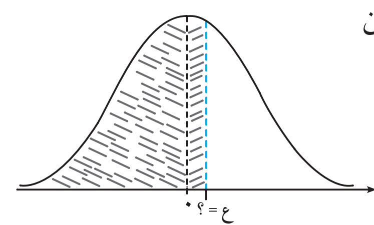
= ٠,٥ − ٠,٢٧٣٤

= ٠,٢٢٦٦

إذن المساحة تحت (ع = −٠,٧٥) هي ٠,٢٢٦٦ ▪

مثال(٤): ما هي العلامة المعيارية ع التي تكون مساحة المنحنى الطبيعي المعياري الواقعة تحتها هي ٠,٦٥؟

الحل:



بما أن المساحة ٠,٦٥ أكبر من ٠,٥ إذن ع موجبة ، وتكون المساحة بين

(ع = ٠) و ع الموجبة هي ٠,٦٥ − ٠,٥ = ٠,١٥

ننظر إلى المساحات في الجدول ونبحث عن العدد ٠,١٥

أو أقرب عدد إليه فنجد العددين ٠,١٤٨٠ ، ٠,١٥١٧

وبما أن العدد ٠,١٥١٧ أقرب إلى العدد ٠,١٥ فإننا نختاره هو وننظر إلى الصف والعمود الذين يتقاطعان عنده

فنجد الصف ٠,٣ والعمود ٩ فتكون ع المطلوبة : ٠,٣ + ٠,٠٩ أي ٠,٣٩ .

قيمة ع التي تكون المساحة تحتها ٠,٦٥ هي ٠,٣٩ تقريباً . ▪

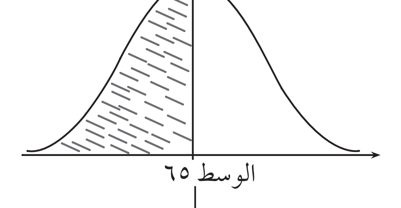
مثال(٥): كانت نتائج امتحان عام قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي = ٦٥ وانحراف معياري = ١٠ أوجد :

(أ) نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تقل عن ٦٥ .

(ب) نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تقل عن ٥٠ .

(جـ) النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا على علامات تزيد عن ٧٠ .

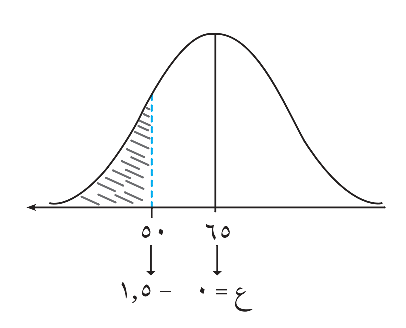
الحل:



(أ) نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تقل عن ٦٥ هي

المساحة المظللة في الشكل، وتساوي ٠,٥٠ ، أي ٥٠٪

(لا ضرورة لاستعمال الجداول في هذه الحالة الخاصة) .



ب) نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تقل عن ٥٠

تساوي المساحة المظللة في الشكل ولايجاد هذه المساحة

نحول العلامة الخام ٥٠ إلى علامة معيارية .

$$ع = \frac{س - \overline{س}}{\sigma} = \frac{٥٠ - ٦٥}{١٠} = \frac{-١٥}{١٠} = -١,٥$$

وحيث ع سالبة فإننا نجد المساحة المساوية لها بالتماثل

من الشكل المقابل :

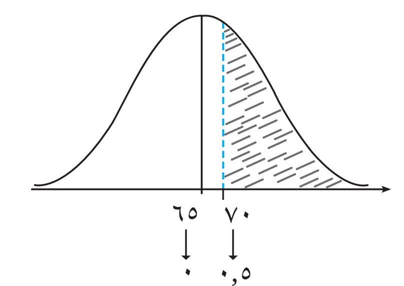
المساحة تحت (ع = -١,٥) = المساحة فوق (ع = ١,٥)

= ٠,٥ - المساحة بين الوسط وَ (ع = ١,٥)

= ٠,٥ - ٠,٤٣٣٢

= ٠,٠٦٦٨

أي أن نسبة الطلبة الذين حصلوا على أقل من ٥٠ هي ٠,٠٦٦٨ ، أي ٦,٦٨٪



جـ) نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تزيد عن ٧٠

تساوي نسبة المساحة المظللة في الشكل .

نحول العلامة الخام ٧٠ إلى علامة معيارية :

$$ع = \frac{س - \overline{س}}{\sigma} = \frac{٧٠ - ٦٥}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = ٠,٥$$

المساحة المظللة = ٠,٥ - المساحة بين الوسط و (ع=٠,٥)

= ٠,٥ - ٠,١٩١٥

= ٠,٣٠٨٥

أي أن نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تزيد عن ٧٠ هي ٠,٣٠٨٥

النسبة المئوية = ٠,٣٠٨٥ X ١٠٠٪ = ٣٠,٨٥٪ ■

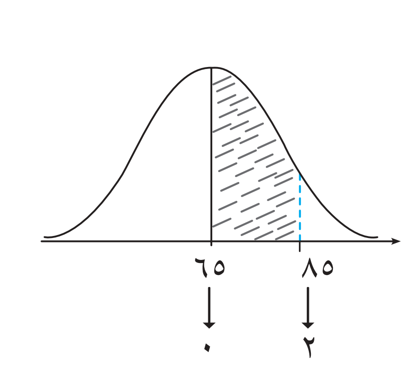
مثال(٦): الوسط الحسابي لأوزان ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥كغم والانحراف المعياري للأوزان يساوي ١٠كغم . إذا كانت الأوزان تتبع التوزيع الطبيعي ، فما هي نسبة الأشخاص الذين تقع أوزانهم بين ٦٥كغم ، ٨٥كغم؟ وما عدد هؤلاء الأشخاص؟

الحل:

نسبة الأشخاص الذين أوزانهم تقع بين ٦٥كغم ، ٨٥كغم = نسبة المساحة المظللة في الشكل .

نحول القيمة الخام ٨٥ إلى علامة معيارية :

$$ع = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{٨٥ - ٦٥}{١٠} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$



نسبة المساحة = ٠,٤٧٧٢ (من الجدول في نهاية الكتاب)

أي أن نسبة الأشخاص = ٠,٤٧٧٢ = ٤٧,٧٢٪

عدد الأشخاص = العدد الكلي X النسبة

= ١٠٠٠ X ٠,٤٧٧٢

= ٤٧٧,٢

= ٤٧٧ شخصاً تقريباً . ■

مثال(٧): الوسط الحسابي لأعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٣٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٢٠٠ ساعة . فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي . واختير أحد المصابيح عشوائياً ، فما احتمال أن يبقى صالحاً لمدة أطول من ١٨٠٠ ساعة؟

الحل:

احتمال أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد عن ١٨٠٠ ساعة = نسبة المساحة المظللة في الشكل .

نحول العدد ١٨٠٠ الى علامة معيارية :

$$ع = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{١٨٠٠ - ١٣٠٠}{٢٠٠} = \frac{٥٠٠}{٢٠٠} = ٢,٥$$

المساحة فوق (ع = ٢,٥) = ٠,٥ - المساحة بين الوسط وَ ع = ٢,٥

= ٠,٥ - ٠,٤٩٣٨

= ٠,٠٠٦٢

الاحتمال المطلوب = ٠,٠٠٦٢ ■

تمارين ومسائل (٢-٢)

(استخدم جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في نهاية الكتاب).

١ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كلٍ من الحالات الآتية:

أ) الواقعة تحت (ع = ١,٢٤)

ب) الواقعة فوق (ع = ١,٠٧)

جـ) الواقعة بين (ع = -٢) وَ (ع = ١,٥)

٢ ما هي العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية؟

أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥

ب) المساحة فوق ع هي ٠,٠٢٢٨

جـ) المساحة بين -ع ، ع هي ٠,٦

٣ وزن رغيف الخبز الذي ينتجه مخبز يتوزع تقريباً بشكل طبيعي بوسط حسابي يساوي ٢٠٠غم وانحراف معياري يساوي ١٠غم.

أ) ما نسبة الأرغفة التي ينتجها المصنع ويقل وزنها عن ٢١٥غم؟

ب) ما نسبة الأرغفة التي ينتجها المصنع ولايقل وزنها عن ١٩٦غم؟

٤ إذا كانت علامات طلبة أحد الصفوف في اختبار الرياضيات تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ٧٢ وانحراف معياري = ٩

أ) إذا كانت علامة النجاح في الاختبار=٦٠ فما النسبة المئوية للطلبة الناجحين؟

ب) إذا اختير أحد الطلبة عشوائياً فما احتمال أن تكون علامته أكبر من ٩٠؟

جـ) إذا تقرر إعطاء أفضل ١٠٪ من الطلبة جوائز تقديريه فما أقل علامة يحصل عليها طالب لينال جائزة؟

٥ إذا كانت أطوال مجموعة من الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥سم وانحراف معياري ١٠سم.

أ) ما نسبة الطلبة الذي تنحصر أطوالهم بين ١٥٠سم ، ١٨٠سم؟

ب) ما عدد هؤلاء الطلبة إذا كان المجموع الكلي للطلبه هو ٥٠٠٠طالب؟

جـ) ما هو الطول الذ ي يقع ٨٢,٣٨٪ من الطلبة تحته؟

٢-٣ مراجعة: مفهوم الاحتمال وقوانينه

تتناول نظرية الاحتمالات أساساً ما يسمى التجارب العشوائية .

التجربة العشوائية : هي التجربة التي لا نستطيع تحديد نتيجتها قبل إجرائها ، ولكننا نستطيع تحديد مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة . تسمى هذه المجموعة الفراغ العيني للتجربة (Ω)، وتسمى كل مجموعة جزئية من الفراغ العيني حادثاً (ح) .

يرتبط بكل حادث عدد يعبر عن إمكانية أو فرصة وقوع هذا الحادث ويسمى احتمال الحادث ل(ح) . لتعيين هذا الاحتمال ، يمكن اللجوء عملياً إلى ما يسمى التكرار النسبي للحادث ، أي النسبة بين عدد مرات وقوع الحادث وعدد مرات إجراء التجربة وهذا ما يدعى الاحتمال التجريبي للحادث . ويسمى العدد الذي يقترب منه التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي للحادث عند زيادة مرات إجراء التجربة زيادة كبيرة جداً يسمى احتمال الحادث .

في الحالة الخاصة التي يكون فيها لجميع عناصر الفراغ العيني الفرصة نفسها في الوقوع ، فإننا نسمي الفراغ العيني فراغاً عينياً منتظماً ونعين للحادث عندئذ احتمالاً نظرياً ل(ح) = $\frac{\text{عدد عناصر الحادث}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

قوانين الاحتمالات:

١ احتمال الحادث المستحيل = ٠ $\quad$ (ل($\emptyset$) = ٠)

٢ احتمال الحادث المؤكد = ١ $\quad$ (ل(Ω) = ١)

٣ احتمال أي حادث ح ينحصر بين ٠ ، ١ $\quad$ (٠ $\leqslant$ ل(ح) $\leqslant$ ١)

٤ احتمال اتحاد حادثين منفصلين = احتمال الأول + احتمال الثاني

أي أنه إذا كان ح$_١$ $\cap$ ح$_٢$ = $\emptyset$ فإن ل(ح$_١$ $\cup$ ح$_٢$) = ل(ح$_١$) + ل(ح$_٢$)

٥ احتمال اتحاد أي حادثين = احتمال الأول + احتمال الثاني – احتمال تقاطع الحادثين .

أي أن ل(ح$_١$ $\cup$ ح$_٢$) = ل(ح$_١$) + ل(ح$_٢$) – ل(ح$_١$ $\cap$ ح$_٢$)

٦ احتمال حادث + احتمال متممة ذلك الحادث = ١

أي أن ل(ح) + ل($\bar{\text{ح}}$) = ١

مثال (١): تتكون تجربة من إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة مجموع العددين على الوجهين العلويين .

قام طالب بتكرار التجربة ٥٠ مرة وسجل النتائج الآتية :

المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
التكرار	٠	٥	٨	٧	٥	٧	٦	٢	٦	٤	٠

١ ما الاحتمال التجريبي لحادث (الحصول على مجموع = ٦)؟

٢ ما الاحتمال النظري لحادث (الحصول على مجموع = ٦)؟

الحل:

١ الاحتمال التجريبي = التكرار النسبي للحادث = $\frac{\text{عدد مرات الحصول على المجموع (٦)}}{\text{عدد مرات اجراء التجربة}}$

$= \frac{٥}{٥٠} = ٠,١$

٢ الاحتمال النظري = $\frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

ح = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١)}

Ω = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، . . . . . . ، (٦ ، ٦)}

ل(ح) = $\frac{٥}{٣٦}$ = ٠,١٣٩

لاحظ الفرق بين قيمتي الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري ولوأجريت التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات لاقترب الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري . ■

مثال (٢): سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من صندوق به ٤٠ بطاقة تحمل الأرقام من ١ إلى ٤٠ .

ما احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة :

١ عدداً زوجياً؟

٢ عدداً يقبل القسمة على ٥؟

٣ عدداً زوجياً أو يقبل القسمة على ٥؟

الحل:

Ω = {١ ، ٢ ، . . . . . . ، ٤٠}

ليكن $ح_1$ = حادث الحصول على عدد زوجي .

، $ح_2$ حادث الحصول على عدد يقبل القسمة على ٥ .

$ح_1$ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، . . . . . . ، ٤٠} وعدد العناصر ٢٠

$ح_٢ = \{٥ ، ١٠ ، ١٥ ، . . . ، ٤٠\}$ وعدد العناصر ٨

$$ل(ح_١) = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١}{٢}$$

$$ل(ح_٢) = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٨}{٤٠} = \frac{١}{٥}$$

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

لكن $ح_١ \cap ح_٢ = \{١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠\}$ إذن : $ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{٤}{٤٠} = \frac{١}{١٠}$

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{١٠} = \frac{٦}{١٠}$$ ■

تمارين ومسائل (٢ - ٣)

١ كيس به ٣ كرات متماثلة ومرقمة ١ ، ٢ ، ٣ . سحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى ولوحظ العددان الظاهران .

ما هو الفراغ العيني للتجربة : (أ) إذا كان السحب مع الإرجاع .

(ب) إذا كان السحب دون إرجاع . استعن بالشجرة البيانية .

٢ ألقيت ٣ قطع نقود منتظمة ولوحظت الأوجه الثلاثة الظاهرة .

(أ) أكتب الفراغ العيني للتجربة.

(ب) أكتب الحوادث الآتية ثم احسب احتمال كل منها :

$ح_١$ = حادث الحصول على صورة واحدة على الأقل .

$ح_٢$ = حادث الحصول على ٣ صور أو ٣ كتابات .

$ح_٣$ = حادث الحصول على كتابتين على الأكثر .

٣ إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين بحيث $ل(ح_١) = ٠,٥$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٧$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٣$

أوجد : (أ) $ل(ح_١ \cup ح_٢)$.

(ب) $ل(\overline{ح_١ \cup ح_٢})$.

٢-٤ الإحتمال المشروط Conditional Probability

تعرفت سابقاً الاحتمال المشروط وهو احتمال وقوع حادث معين ح$_1$ بشرط أو علماً بأن حادثاً آخر ح$_2$ قد وقع . يرمز لهذا الاحتمال بالرمز ل(ح$_1$ / ح$_2$) ويعرف هكذا :

تعريف:

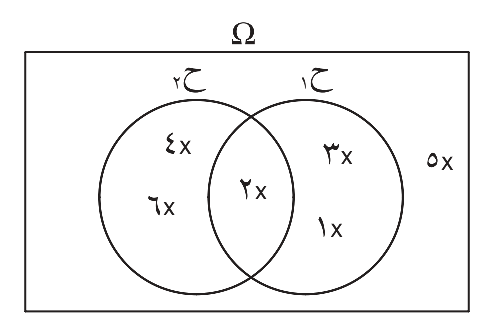
$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)} ، ل(ح_2) \neq ٠$$

مثال(١): في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، وملاحظة العدد الظاهر ، إذا كان :

ح$_1$: حادث ظهور عدد يقل عن ٤

ح$_2$: حادث ظهور عدد زوجي

فأوجد : ل(ح$_1$ / ح$_2$)



الحل:

$\Omega = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

ح$_1$ = $\{١ ، ٢ ، ٣\}$

ح$_2$ = $\{٢ ، ٤ ، ٦\}$

$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)}$$

لكن ح$_1 \cap$ ح$_2$ = $\{٢\}$ إذن ل (ح$_1 \cap$ ح$_2$) = $\frac{١}{٦}$

$$ل(ح_2) = \frac{عدد عناصر ح_2}{عدد عناصر \Omega} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

أي أن ل (ح$_1$ / ح$_2$) = $\frac{١}{٦} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١} = \frac{١}{٣}$

يمكنك ملاحظة صحة الحل بسهولة حيث أن هناك فرصة واحدة لحدوث ح$_1$ إذا علمنا أن ح$_2$ والمكون من ثلاثة عناصر قد تحقق أي أن هناك فرصة واحدة من بين ثلاث فرص متساوية أي أن ل (ح$_1$ / ح$_2$) = $\frac{١}{٣}$ ■

ملاحظات :

① هناك فرق بين ل (ح$_1$) ، ل(ح$_1$/ ح$_2$) ففي المثال السابق نجد أن ل (ح$_1$) = $\frac{١}{٢}$ ، بينما ل(ح$_1$/ ح$_2$) = $\frac{١}{٣}$
أي أن المعلومات الإضافية بأن ح$_2$ قد وقع غيرت من قيمة ل (ح$_1$) وهذا أمر طبيعي فإن علمنا بوقوع ح$_2$ يجعل احتمال وقوع ح$_1$ منسوباً إلى فضاء عيني مقلص جديد هو ح$_2$ وليس Ω .

② في حالات الاحتمال المنتظم -كما في المثال السابق- يمكننا تطبيق صيغة أخرى لقانون الاحتمال المشروط وهي كالتالي :

$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{\text{عدد عناصر}(ح_1 \cap ح_2)}{\text{عدد عناصر}(ح_2)}$$

ففي المثال السابق ، $ل(ح_1 / ح_2) = \frac{\text{عدد عناصر}(ح_1 \cap ح_2)}{\text{عدد عناصر}(ح_2)} = \frac{١}{٣}$

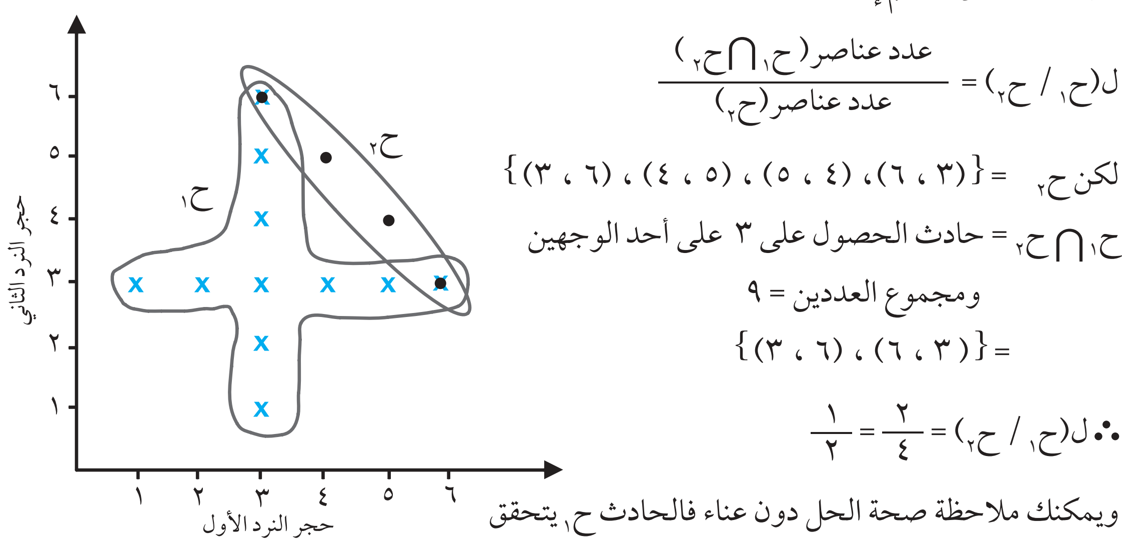
وهي صيغة بسيطة ويشجع استعمالها في حالات الاحتمال المنتظم .

مثال(٢): في تجربة رمي حجري نرد منتظمين مرة واحدة وملاحظة العددين الظاهرين ، ما هو احتمال أن يكون العدد الظاهر على أحد الوجهين = ٣ علماً بأن مجموع العددين الظاهرين = ٩؟

الحل:

ليكن ح$_1$: حادث ظهور العدد ٣ على أحد الوجهين ، ح$_2$: حادث مجموع العددين ٩
فضاء الاحتمال منتظم إذن :

$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{\text{عدد عناصر}(ح_1 \cap ح_2)}{\text{عدد عناصر}(ح_2)}$$



لكن ح$_2$ = {(٣ ، ٦)، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٣)}

ح$_1 \cap$ ح$_2$ = حادث الحصول على ٣ على أحد الوجهين ومجموع العددين = ٩

= {(٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣)}

∴ $ل(ح_1 / ح_2) = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

ويمكنك ملاحظة صحة الحل دون عناء فالحادث ح$_1$ يتحقق عند الحصول على النتيجتين : (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣) بعد معرفتنا أن ح$_2$ قد تحقق ، فهناك فرصتان من بين ٤ فرص متساوية أي $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ▪

قاعدة الضرب للاحتمال المشروط:

نعلم أن : $ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$ .... (١)

$ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_٢ \cap ح_١)}{ل(ح_١)}$ .... (٢)

بإجراء عملية الضرب التبادلي في المعادلتين (١) ، (٢) وملاحظة أن $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢ \cap ح_١)$ يكون :

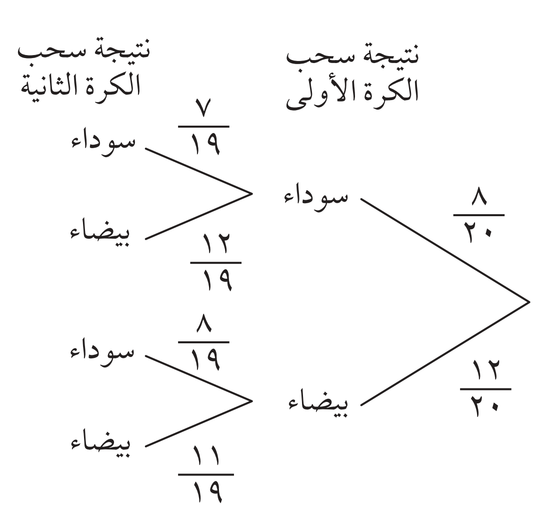
$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢) \times ل(ح_١ / ح_٢)$

$= ل(ح_١) \times ل(ح_٢ / ح_١)$

أي أن احتمال وقوع حادثين معاً يساوي احتمال وقوع أحدهما X احتمال وقوع الآخر بشرط وقوع الأول.

مثال (٣): حقيبة بها ٨ كرات سوداء ، ١٢ كرة بيضاء . سحبت كرتان على التوالي عشوائياً دون إرجاع .
ما احتمال أن تكون الكرتان سوداوين؟

الحل:



ليكن $ح_١$: حادث الكرة الأولى سوداء .

$ح_٢$: حادث الكرة الثانية سوداء .

إذن احتمال أن تكون الكرتان سوداوين $= ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ل(ح_١) \times ل(ح_٢ / ح_١)$

$= \frac{٨}{٢٠} \times \frac{٧}{١٩}$

$= \frac{٥٦}{٣٨٠}$ ▪

مثال (٤): $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثان في Ω بحيث أن : $ل(ح_١) = ٠,٧$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٤$ ، $ل(ح_١/ح_٢) = ٠,٣$ أوجد :

(أ) $ل(ح_١ \cap ح_٢)$

(ب) $ل(ح_١ \cup ح_٢)$

الحل:

(أ) $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢) \times ل(ح_١/ح_٢)$

$= ٠,٤ \times ٠,٣ = ٠,١٢$

(أ) $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ٠,٧ + ٠,٤ - ٠,١٢$

$= ٠,٩٨$ ▪

تمارين ومسائل (٢-٤)

١ ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة، ما احتمال أن يكون العدد الظاهر عدداً أولياً بشرط أن العدد الظاهر هو عدد فردي؟

٢ $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثان بحيث : $ل(ح_١) = ٠,٥$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٨$ ، $ل(ح_١/ح_٢) = ٠,٤$ أوجد :

(أ) $ل(ح_١ \cap ح_٢)$ (ب) $ل(ح_٢/ح_١)$

٣ في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين مرة واحدة، أوجد :

(أ) احتمال أن يكون العدد الظاهر على الحجر الثاني يساوي ٦ علماً بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوي ٤ .

(ب) احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عدداً زوجياً علماً بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوي ٦ .

٤ صندوق به ٨ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، ٣ كرات حمراء . سحبت من الصندوق كرتان على التوالي دون ارجاع . أوجد :

(أ) احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين .

(ب) احتمال أن تكون احدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء .

٥ مركز ثقافي لتعليم اللغات فيه ٦٠٪ من الدارسين يدرسون اللغة الانجليزية، ٥٠٪ من الدارسين يدرسون اللغة الفرنسية، ٣٥٪ من الدارسين يدرسون اللغتين معاً . أرسم شكلاً مناسباً يوضح هذه المعطيات، وإذا اختير أحد الدارسين في المركز عشوائياً، أوجد :

(أ) احتمال أن يكون هذا الشخص دارساً إحدى اللغتين على الأقل .

(ب) احتمال أن يكون هذا الشخص دارساً اللغة الانجليزية إذا كان دارساً اللغة الفرنسية .

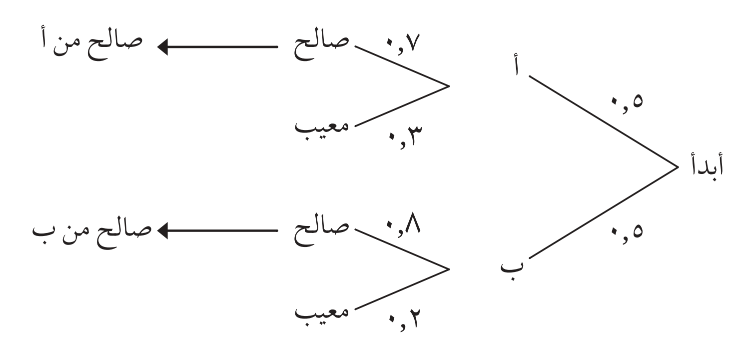
٢-٥ نظرية التجزئة Partition Theory

بعض المشكلات العملية والتي تعتمد على الاحتمالات في حلها تتألف من إجراء سلسلة من تجربتين عشوائيتين (أو أكثر) وتتطلب المشكلة لحلها حساب احتمال وقوع حادث معين مرتبط بهاتين التجربتين . إن إحدى الطرق المناسبة لوصف هذا الوضع استخدام الشجرة البيانية وقاعدة ضرب الاحتمال المشروط كما في الأمثلة الآتية .

مثال(١): صندوقان أ ، ب . في الصندوق الأول (أ) ٧ مصابيح صالحة ، ٣ مصابيح معيبة ، وفي الصندوق الثاني (ب) ٨ مصابيح صالحة ، ٢ معيبة . أختير أحد الصندوقين عشوائياً ثم سحب منه مصباح واحد عشوائيا . ما احتمال أن يكون هذا المصباح صالحاً؟

الحل:

هذه سلسلة من تجربتين عشوائيتين يمكن توضيح نتائجها في المخطط الآتي :



المخطط يوضح أن التجربة الأولى وهي اختيار أحد الصندوقين تنتهي بنتيجتين لهما الفرصة نفسها في الوقوع ، أي أن احتمال اختيار الصندوق (أ)= احتمال اختيار الصندوق (ب) = ٠,٥

كما أن التجربة الثانية وهي اختيار مصباح واحد من أحد الصندوقين تنتهي بنتيجتين : صالح ، معيب واحتمال أن يكون المصباح صالحاً إذا كان من (أ) هو ٠,٧ واحتمال أن يكون معيباً إذا كان من(أ) = ٠,٣ واحتمال أن يكون صالحاً إذا كان من (ب) هو ٠,٨ واحتمال أن يكون معيباً إذا كان من (ب) هو ٠,٢

وعليه إذا فرضنا أن : $ح_١$ حادث اختيار الصندوق أ .

، $ح_٢$ حادث اختيار الصندوق ب .

، ح حادث اختيار مصباح يكون صالحاً .

فإن وقوع ح يمكن أن يتم بطريقتين منفصلتين إما أن يكون صالحاً ومن (أ) أو أن يكون صالحاً ومن (ب) .

أي أن احتمال أن يكون المصباح صالحاً = احتمال أن يكون صالحاً ومن (أ) + احتمال أن يكون صالحاً ومن (ب)

$ل(ح) = ل(ح \cap ح_١) + ل(ح \cap ح_٢)$

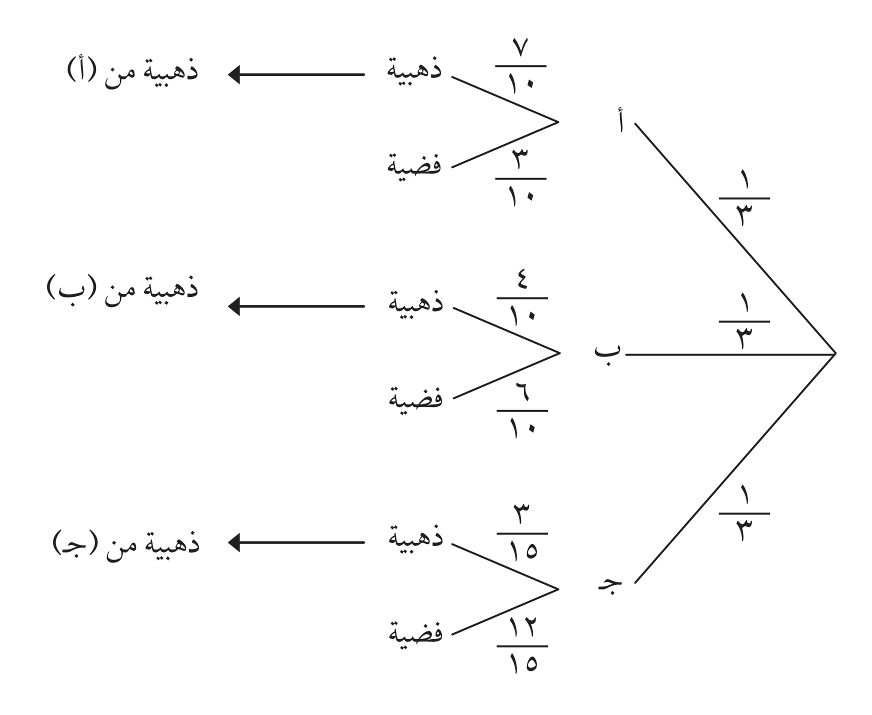
$= ل(ح_١) \times ل(ح/ح_١) + ل(ح_٢) \times ل(ح/ح_٢)$

$= ٠,٥ \times ٠,٧ + ٠,٥ \times ٠,٨$

$= ٠,٣٥ + ٠,٤٠ = ٠,٧٥$

مثال (٢): ثلاثة صناديق متماثلة يوجد في الأول (أ) ٧ ساعات ذهبية، ٣ فضية ويوجد في الثاني (ب) ٤ ساعات ذهبية، ٦ فضية ويوجد في الثالث (ج) ٣ ساعات ذهبية، ١٢ ساعة فضية.
اختير صندوق عشوائياً، ثم سحبت منه ساعة واحدة، ما احتمال أن تكون هذه الساعة ذهبية؟

الحل:



على فرض أن: $ح_١$: حادث اختيار الصندوق أ.

$ح_٢$: حادث اختيار الصندوق ب.

$ح_٣$: حادث اختيار الصندوق ج.

ح : حادث اختيار ساعة ذهبية.

فإن ل(ح) = ل(ح$_١$) × ل(ح/ح$_١$) + ل(ح$_٢$) × ل(ح/ح$_٢$) + ل(ح$_٣$) × ل(ح/ح$_٣$)

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٤}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{١٥}$$

$$= \frac{٧}{٣٠} + \frac{٤}{٣٠} + \frac{١}{١٥}$$

$$= \frac{٧ + ٤ + ٢}{٣٠} = \frac{١٣}{٣٠}$$ ■

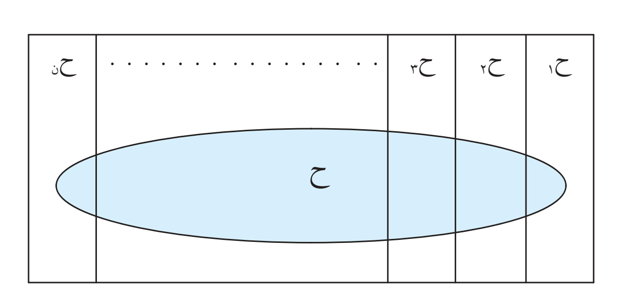
المثالان السابقان يوضحان النظرية الآتية :

نظرية التجزئة:

إذا كانت $ح_1$ ، $ح_2$ ، . . . ، $ح_ن$ حوادث منفصلة (متباعدة) وشاملة أي أن :

$ح_1 \cup ح_2 \cup \cdots \cup ح_ن = \Omega$ ، وتقاطع أي حادثين $= \emptyset$، وكان ح أي حادث يمكن أن يقع مع أحد الحوادث المذكورة

فإن : $ل(ح) = ل(ح_1) \times ل(ح/ح_1) + ل(ح_2) \times ل(ح/ح_2) + \ldots\ldots + ل(ح_ن) \times ل(ح/ح_ن)$



الشكل المجاور يوضح الحوادث $ح_1$ ، $ح_2$ ، . . . ، $ح_ن$ المنفصلة والشاملة للفراغ العيني ، والحادث ح الذي يقع مع واحد أو أكثر من الحوادث المذكورة .

لاحظ أن :

$ح = (ح \cap ح_1) \cup (ح \cap ح_2) \cup \cdots \cup (ح \cap ح_ن)$

$\Leftarrow ل(ح) = ل(ح_1) \times ل(ح/ح_1) + ل(ح_2) \times ل(ح/ح_2) + \ldots\ldots + ل(ح_ن) \times ل(ح/ح_ن)$

تمارين ومسائل (٥-٢)

١ صندوق (أ) يحوي ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ وصندوق آخر (ب) يحوي ٥ بطاقات مرقمه من ١ إلى ٥ . اختير أحد الصندوقين عشوائياً ثم سحبت منه بطاقة واحدة. ما احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً؟

٢ موظفتان في مكتب . تقوم الموظفة الأولى بطباعة ٧٠٪ من خطابات المكتب على الحاسوب وتكون ٨٠٪ من خطاباتها دون أخطاء ، وتقوم الثانية بطباعة باقي الخطابات وتكون ٩٠٪ من خطاباتها دون أخطاء . اختير أحد الخطابات عشوائياً ، فما احتمال أن يكون دون أخطاء؟

٣ ثلاثة صناديق أ ، ب ، جـ يحتوي (أ) على ٣ كرات حمراء ، ٥ بيضاء ويحتوي (ب) على ٢ حمراء ، ١ بيضاء ويحتوي (جـ) على ٢ حمراء ، ٣ بيضاء . أختير أحد الصناديق عشوائياً ثم سحبت منه كرة واحدة . ما احتمال أن تكون الكرة حمراء؟

٤ صندوقان أ ، ب في الأول (أ) ٥ كرات حمراء ، ٣ بيضاء وفي الثاني (ب) ٣ كرات حمراء ، ٥ بيضاء . تلقى أولاً قطعة نقد منتظمة مرة واحدة فاذا ظهرت صورة تسحب كرة واحدة من الصندوق (أ) ، وإذا ظهرت كتابة ، تسحب كرة واحدة من الصندوق (ب) ، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

٢-٦ الحوادث المستقلة Independent Events

قد نجد حادثاً $ح_١$ لا يتأثر بوقوع (أو عدم وقوع) حادث آخر $ح_٢$، أي أن: $ل(ح_١) = ل(ح_١ / ح_٢)$.

في هذه الحالة نقول إن $ح_١$ حادث مستقل عن $ح_٢$ وحيث إن: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١ / ح_٢) \times ل(ح_٢)$

فإن: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢)$

تعريف:

$ح_١$ ، $ح_٢$ حادثان مستقلان إذا كان $ل(ح_١ / ح_٢) = ل(ح_١)$، $ل(ح_٢ / ح_١) = ل(ح_٢)$

نتيجة: إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين مستقلين فإن $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢)$.

مثال(١): إذا كان احتمال أن يصيب أحمد هدفاً هو ٠,٨ واحتمال أن يصيب جمال الهدف هو ٠,٧ . صوَّب كل من أحمد وجمال مرة واحدة نحو الهدف . أوجد:

(أ) احتمال أن يصيب أحمد وجمال الهدف معاً .

(ب) احتمال أن يُصاب الهدف .

الحل:

إذا رمزنا بالرمز $ح_١$ للحادث «أن يصيب أحمد الهدف».

وبالرمز $ح_٢$ لحادث: «أن يصيب جمال الهدف».

فإن $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثان مستقلان وعليه فإن:

(أ) احتمال أن يصيب أحمد وجمال الهدف معاً $= ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ل(ح_١) \times ل(ح_٢) = ٠,٨ \times ٠,٧$

$= ٠,٥٦$

(ب) احتمال أن يصاب الهدف = احتمال أن يصيب أحمد أو جمال الهدف

$= ل(ح_١ \cup ح_٢)$

$= ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ٠,٨ + ٠,٧ - ٠,٥٦$

$= ٠,٩٤$ ■

مثال(٢): إذا كان ل(ح$_1$)= ٠,٥ ، ل(ح$_1 \cup$ ح$_2$)=٠,٧٥ ، فأوجد ل(ح$_2$) في كل من الحالتين الآتيتين :

(أ) إذا كان ح$_1$ ، ح$_2$ مستقلين .

(ب) إذا كان ح$_1$ ، ح$_2$ منفصلين (متباعدين)

الحل:

(أ) إذا كان ح$_1$ ، ح$_2$ مستقلين فإن :

ل(ح$_1 \cup$ ح$_2$) = ل(ح$_1$) + ل(ح$_2$) – ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$)

= ل(ح$_1$) + ل(ح$_2$) – ل(ح$_1$) × ل(ح$_2$)

٠,٧٥ = ٠,٥ + س – ٠,٥ × س

٠,٧٥ = ٠,٥ + ٠,٥س

٠,٢٥ = ٠,٥س

س = $\frac{٠,٢٥}{٠,٥}$ = $\frac{٢٥}{٥٠}$ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥

(ب) إذا كان ح$_1$ ، ح$_2$ منفصلين فإن :

ل (ح$_1 \cup$ ح$_2$) = ل (ح$_1$) + ل(ح$_2$)

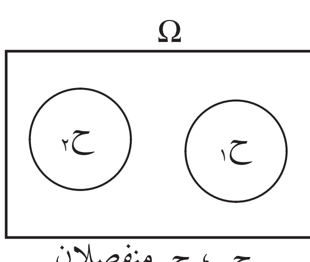
٠,٧٥ = ٠,٥ + ص

ص = ٠,٢٥ ■

ملاحظات :

(أ) هناك فرق بين انفصال حادثين واستقلالهما فانفصال ح$_1$ ، ح$_2$ يعني عدم وقوعهما معاً أي أن : ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$)= ٠
بينما استقلال ح$_1$ ، ح$_2$ يعني عدم تأثر أحدهما بوقوع الآخر أو أن ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$) = ل(ح$_1$) × ل(ح$_2$) .

فمثلاً عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وكان ح$_1$ = حادث ظهور عدد زوجي، ح$_2$= حادث ظهور عدد فردي

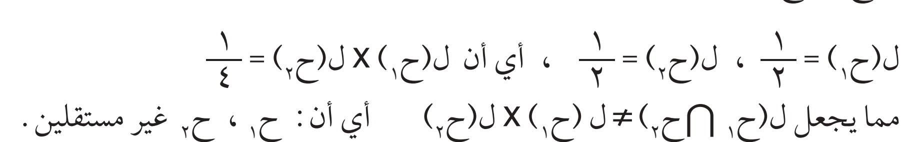


ح$_1$ ، ح$_2$ منفصلان

فإن ح$_1$ ، ح$_2$ حادثان منفصلان إذ لا يمكن أن تكون نتيجة رمي الحجر عدداً زوجياً وفردياً في نفس الوقت أو لأن ح$_1$ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ح$_2$ = {١ ، ٣ ، ٥}
ومن الواضح أن ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$) = ٠ فهما منفصلان .

هل ح$_1$ ، ح$_2$ مستقلان ؟ هل ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$) = ل(ح$_1$) × ل(ح$_2$)؟

ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$) = ل($\emptyset$) = صفر



ل(ح$_1$) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ح$_2$) = $\frac{١}{٢}$ ، أي أن ل(ح$_1$) × ل(ح$_2$) = $\frac{١}{٤}$

مما يجعل ل(ح$_1 \cap$ ح$_2$) ≠ ل (ح$_1$) × ل(ح$_2$) أي أن : ح$_1$ ، ح$_2$ غير مستقلين .

(ب) إذا كان $ح_1$ ، $ح_2$ حادثين مستقلين فيمكن البرهنه على أن كلاً من أزواج الحوادث الآتية مستقلة أيضاً :

(١) $ح_1$ ، $\overline{ح_2}$ (٢) $\overline{ح_1}$ ، $ح_2$ (٣) $\overline{ح_1}$ ، $\overline{ح_2}$

مثال (٢): صندوق به ٩ كرات حمراء، ٦ كرات بيضاء . سحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى مع الإرجاع . أوجد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين .

الحل:

ليكن $ح_1$ حادث : « الكرة الأولى حمراء» .

$ح_2$ حادث : « الكرة الثانية حمراء» .

احتمال أن تكون الكرتان حمراوين = ل$(ح_1 \cap ح_2)$

= ل$(ح_1)$ × ل$(ح_2)$ لأن $ح_1$ ، $ح_2$ مستقلان

$= \frac{٩}{١٥} \times \frac{٩}{١٥} = \frac{٩}{٢٥}$ ▪

لاحظ الفرق بين السحب دون إرجاع والسحب مع الإرجاع ففي الحالة الأولى تتأثر نتيجة السحب في المرة الثانية بنتيجة السحب في المرة الأولى بينما في الحالة الثانية أي في حالة السحب مع الإرجاع لا يكون مثل هذا التأثير بسبب إعادة الكرة إلى الصندوق فيعود الصندوق كما كان في المرة الأولى .

تمارين ومسائل (٢-٦)

١ حادثان $ح_1$ ، $ح_2$ بحيث ل$(ح_1)$ = ٠,٥ ، ل$(ح_2)$ = ٠,٤ ، ل $(ح_1 / ح_2)$ = ٠,٣

(أ) هل $ح_1$ ، $ح_2$ مستقلان؟

(ب) أوجد ل$(ح_1 \cap ح_2)$

٢ $ح_1$ ، $ح_2$ حادثان مستقلان بحيث ل$(ح_1 / ح_2) = \frac{٢}{٣}$ ، ل$(ح_1 \cap ح_2) = \frac{١}{٣}$. أوجد :

(أ) ل $(ح_2)$

(ب) ل $(ح_1)$

٣ إذا كان ل $(ح_1) = \frac{١}{٣}$ ، ل $(ح_1 \cup ح_2) = \frac{٣}{٤}$ فأوجد ل$(ح_2)$ في كلّ من الحالتين الآتيتن :

(أ) $ح_1$ ، $ح_2$ حادثان منفصلان

(ب) $ح_1$ ، $ح_2$ حادثان مستقلان .

٤ ألقيت ٣ قطع نقد منتظمة مرة واحدة. ما احتمال الحصول على صورة على كل من القطع الثلاث؟

٥ احتمال أن يصيب شخص هدفاً هو ٠,٦ . صوّب هذه الشخص على الهدف ٣ مرات متتالية. أوجد:

(أ) احتمال أن يصيب الشخص الهدف في المرات الثلاث.

(ب) احتمال أن يصيب الشخص الهدف في أول مرتين ولا يصيبه في المرة الثالثة.

٦ صندوق (أ) فيه ٥ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، وصندوق (ب) فيه ٦ كرات بيضاء وكرتان حمراوان، سحبت كرة واحدة عشوائياً من كل صندوق، ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون نفسه؟

٧ صندوق به ١٠ كرات حمراء، ٦ كرات سوداء، ٤ كرات بيضاء. سحبت ٣ كرات الواحدة وراء الأخرى مع الإرجاع.
أوجد:

(أ) احتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء.

(ب) احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية والثالثة سوداوين.

تمارين عامة:

١ إذا كانت نتائج ٨٠٠ طالب في امتحان عام موزعة توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي ٦٩ وانحراف معياري يساوي ١٠ .

(أ) ما العلامة المعيارية لطالب علامته في الامتحان=٧٥؟

(ب) ما العلامة الخام لطالب علامته المعيارية =٢؟

(جـ) ما عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها العلامة ٥٤ عن الوسط؟

(د) ما العلامة التي تنحرف دون الوسط بمقدار ١,٢ انحراف معياري؟

(هـ) إذا كانت علامة النجاح في الامتحان تساوي ٦٠ فما نسبة النجاح في الامتحان؟ وما عدد الطلبة الناجحين؟

(و) إذا أُعطي أحسن ٤٪ من الطلاب تقدير (ممتاز) فما أقل علامة يحصل عليها الطالب ليكون تقديره (ممتاز)؟

(ي) إذا اختير طالب عشوائياً فما احتمال أن يكون ضمن أفضل ١٠٪ من المتقدمين للامتحان؟

٢ إذا كان الوسط الحسابي للزمن الذي يحتاجه عمال أحد المصانع والبالغ عددهم ٣٠٠٠ عامل لإنجاز عملية معينة هو ٧٥ دقيقة والانحراف المعياري هو ٥ دقائق وكان توزيع زمن انجاز العملية يتبع تقريباً التوزيع الطبيعي فأوجد:

(أ) نسبة العمال الذين ينجزون العملية في أقل من ٦٥ دقيقة .

(ب) عدد العمال الذين ينجزون العملية في وقت يتراوح من ٧٥ إلى ٨٥ دقيقة .

٣ إذا كان الموظفون العاملون في إحدى الكليات موزعين كما في الجدول الآتي:

	ذكور	اناث
أكاديمي	٤٢	٢٨
إداري	٧	١٣
عامل	٢٦	٩

اختير أحد الموظفين في الكلية عشوائياً. أوجد:

(أ) احتمال أن يكون الموظف انثى .

(ب) احتمال أن يكون الموظف أنثى وأكاديمي .

(جـ) احتمال أن يكون الموظف إدارياً عِلْماً بأنه من الذكور .

٤ $ح_1$ ، $ح_2$ حادثان بحيث ل($ح_1$) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل($ح_2$) = $\frac{١}{٦}$ ، ل ($ح_1 \cup ح_2$) = $\frac{١٣}{٣٠}$

بيّن أن $ح_1$ ، $ح_2$ حادثان ليسا منفصلين وليسا مستقلين .



الرياضيات المالية

٣-١ مراجعة المتباينات من الدرجة الأولى بمتغير وبمتغيرين

تعلمت في صف سابق مفهوم المتباينة وحل المتباينة من الدرجة الأولى بمتغير واحد وبمتغيرين، كما تعلمت كيف تجد مجموعة الحل لنظام من المتباينات من الدرجة الأولى بمتغيرين، وفيما يأتي مراجعة لهذه المفاهيم وطرق الحل.

أولاً: حل متباينة بمتغير واحد:

المتباينة ٣س-١ ≥ س+٥ هي متباينة من الدرجة الأولى وبمتغير واحد، ولحل هذه المتباينة أي لمعرفة قيم المتغير س التي تجعل المتباينة عبارة صحيحة، نقوم بالخطوات الآتية:

١ نجمع (-س) لكل من طرفي المتباينة فينتج:

٣س - ١ + (-س) ≥ س + ٥ + (-س)

٢س - ١ ≥ ٥

٢ نجمع ١ لطرفي المتباينة فينتج:

٢س - ١ + ١ ≥ ٥ + ١

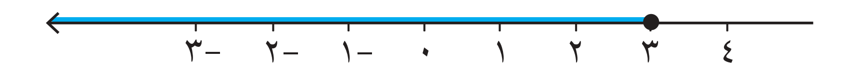
٢س ≥ ٦

٣ نضرب طرفي المتباينة في العدد $\frac{١}{٢}$ فينتج:

$\frac{١}{٢} \times$ ٢س ≥ $\frac{١}{٢} \times ٦$

س ≥ ٣

وهذا يعني أن مجموعة الحل للمتباينة هي مجموعة جميع الأعداد الحقيقية التي يقل كل منها عن ٣ أو يساوي ٣، ويمكن تمثيل هذه المجموعة على خط الأعداد كما في الشكل:



لاحظ أن حل المتباينات يعتمد على الخصائص الأساسية الآتية:

(أ) **إذا كانت أ > ب فإن أ + جـ > ب + جـ ، جـ أي عدد حقيقي.**

(ب) **إذا كانت أ > ب فإن أ × جـ > ب × جـ ، جـ عدد حقيقي موجب.**

(جـ) **إذا كانت أ > ب فإن أ × جـ < ب × جـ ، جـ عدد حقيقي سالب.**

ثانياً: حل متباينة بمتغيرين

المتباينة س + ص > ٢ تسمى متباينة من الدرجة الأولى بمتغيرين، ومجموعة حل المتباينة هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة (س ، ص) التي تحقق المتباينة حيث س، ص عددان حقيقيان . لحل هذه المتباينة بيانياً نتبع الخطوات الآتية :

١ نرسم الخط المستقيم س + ص = ٢ في المستوى الديكارتي وذلك بتعيين نقطتين على الخط المستقيم تحققان المعادلة ونقطة ثالثة للتحقق كما في الجدول :

س	٠	٢	١
ص	٢	٠	١

٢ الخط المستقيم س + ص = ٢ يقسم المستوى إلى منطقتين إحداهما تمثل مجموعة الحل للمتباينة، ولتحديد هذه المنطقة نستخدم نقطة ما مثل نقطة الأصل (٠ ، ٠) كنقطة اختبار فإذا عوضنا س = ٠ ، ص = ٠ في المتباينة فإننا نجد: ٠+٠ > ٢ أي ٠ > ٢ وهذه عبارة خاطئة إذن النقطة (٠ ، ٠) لا تنتمي لمنطقة الحل، أي أن مجموعة الحل تمثلها جميع النقاط التي في جهة الخط التي لا توجد فيها نقطة الأصل . لاحظ المنطقة المظللة (المنطقة فوق الخط) . من الأزواج المرتبة التي تنتمي لمجموعة الحل :

(٠، ٣)، (١، ٢)، (٢، ٤)، (-١، ٤)، . . .

ملاحظة : رُسم الخط متقطعاً لأن نقاط الخط لا تنتمي لمجموعة حل المتباينة .

مثال(٢): مثل بيانياً في المستوى الديكارتي مجموعة حل المتباينة س ≤ ٢

الحل:

المعادلة س = ٢ تمثل خطاً مستقيماً يوازي محور الصادات ويبعد عنه وحدتين . مجموعة حل المتباينة س ≤ ٢ تمثلها المنطقة المظللة في الشكل والواقعة إلى يسار الخط س = ٢ لاحظ أن المتباينة س ≤ ٢ تضع قيوداً على س ولا تضع قيوداً على ص . أي أن ص يمكن أن تكون أي عدد حقيقي ولذا فإن مجموعة الحل تشمل النقاط (٠، ٠) ، (٠، ١) ، (-١، ٢) ، . . . . ، . . . الخ . ■

ثالثاً: حل نظام من المتباينات من الدرجة الأولى وبمتغيرين

لايجاد مجموعة الحل لنظام من المتباينات (متباينتين أو أكثر)، نمثل بيانياً مجموعة الحل لكل متباينة على انفراد باستخدام نظام الاحداثيات نفسه ثم نجد منطقة التقاطع بين مجموعات الحل كما هو موضح في المثال التالي :

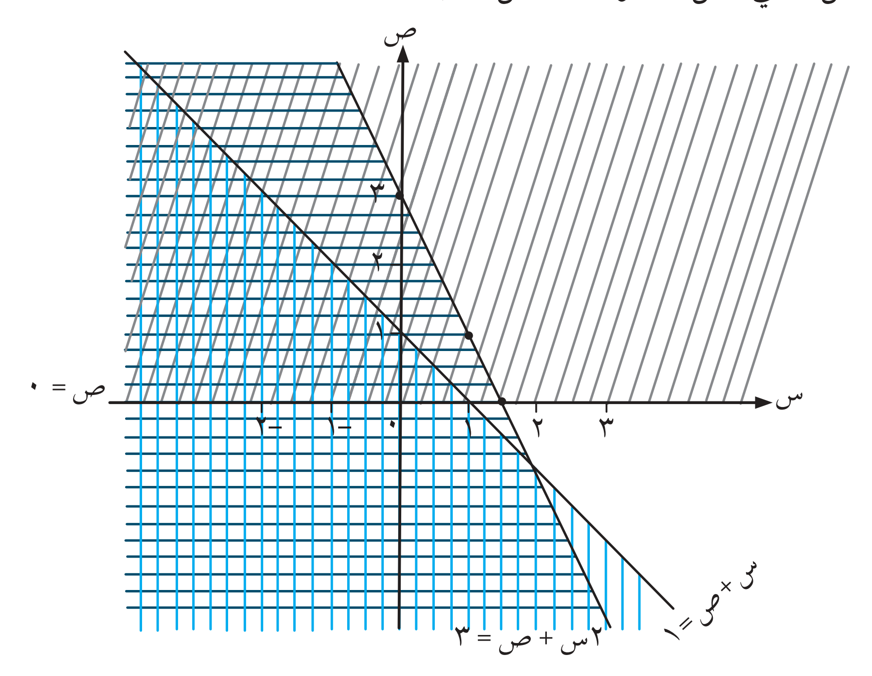
مثال: مثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات :

٢س + ص ⩽ ٣
س + ص ⩽ ١
ص ⩾ ٠

الحل:

نمثل كل متباينة برسم الخط المستقيم المرافق وتظليل المنطقة المطلوبة بعد استخدام نقطة اختبار مناسبة .

الشكل التالي يمثل مجموعات الحل للمتباينات الثلاث .



المنطقة المظللة بخطوط أفقية تمثل مجموعة حل المتباينة : ٢س + ص ⩽ ٣

المنطقة المظللة بخطوط رأسية تمثل مجموعة حل المتباينة : س + ص ⩽ ١

المنطقة المظللة بخطوط مائلة تمثل مجموعة حل المتباينة : ص ⩾ ٠

المنطقة التي تمثل مجموعة حل النظام هي تقاطع مجموعات الحل الثلاث . أي المنطقة المظللة بخطوط أفقية ورأسية ومائلة .

الشكل المجاور يوضح منطقة الحل للنظام .
ويمكن التحقق من صحة الحل باختيار نقطة
في منطقة التقاطع المشتركة واثبات أن هذه النقطة
تحقق كلاً من المتباينات الثلاث .
فمثلاً النقطة (−١ ، ١) تحقق المتباينة
الأولى وهي ٢س + ص ≤ ٣
لأن : (٢ × −١) + (١)
= −١ ≤ ٣
وتحقق المتباينة الثانية وهي س + ص ≤ ١
لأن : (−١) + ١ = صفر ≤ ١
وتحقق المتباينة الثالثة وهي ص ≥ ٠ لأن : ١ ≥ ٠
إذن فالنقطة (−١ ، ١) تنتمي لمجموعة حل النظام . ■

تمارين ومسائل (٣-١)

١ حل المتباينة : ٦(س − ١) > ٢س + ٢ ، ومَثّل مجموعة الحل على خط الأعداد .

٢ مثل بيانياً في المستوى الديكارتي مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

(أ) س > ٢

(ب) ص ≤ −٣

(جـ) ٢ص + ٣س > ٦

٣ مثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي وأجب على الأسئلة التي تليه :

ص − س > ١
ص + س < ١

(أ) هل النقطة (٠ ، ٠) تنتمي لمجموعة حل النظام؟

(ب) هل النقطة (٠ ، ٥) تنتمي لمجموعة حل النظام؟

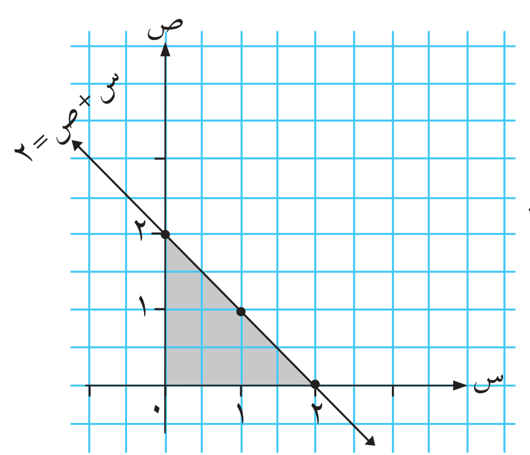
(جـ) من الرسم جد ثلاث نقاط تقع ضمن منطقة الحل .

٤ مثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي :

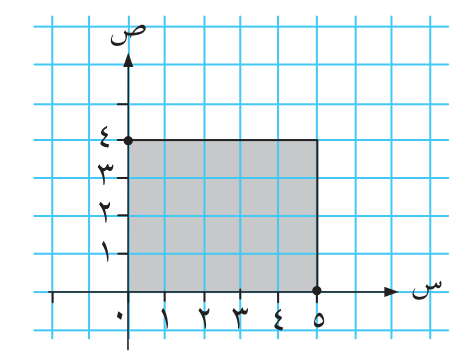
ص − ٢س > ٣
٢ص + س > ٢
ص > ٠

٥ جد مجموعة الحل لنظام المتباينات :

ص − س ≤ ١
ص + س ≤ ٢
ص ≥ ٠
س ≥ ٠



٦ أكتب نظاماً من ثلاث متباينات تكون مجموعة حله ممثلة بالمنطقة المظللة (المثلثية) في الشكل المجاور .



نشاط إضافي:

أكتب نظاماً من أربع متباينات تكون مجموعة حله ممثلة بالمنطقة المظللة (المستطيلة) في الشكل المجاور .

٣-٢ تطبيقات عملية - البرمجة الخطية Linear Programming

يحتاج مهندسو الإنتاج ومتخذو القرار في المصانع وإدارة الأعمال إلى جعل كلفة الإنتاج أقل ما يمكن أو جعل الربح أكبر ما يمكن. إن إحدى الطرق لمعالجة هذا النوع من المسائل التي تتعلق بالقيم الكبرى أو الصغرى ما يسمى بالبرمجة الخطية حيث يكون للمتباينات من الدرجة الأولى أي الخطية الدور الأهم في الحل، وفيما يلي بعض الأمثلة البسيطة على هذا النوع من التطبيقات.

مثال(١): هناك نوعان من أقلام الحبر، ثمن القلم من النوع الأول ٦ دنانير ومن النوع الثاني ١٢ ديناراً، فإذا كان مع سمير ٢٤ ديناراً فجد:

(أ) الإمكانيات المختلفة لشراء أقلام من النوعين.

(ب) كم قلماً يشتري سمير من كل نوع حتى يصبح معه أكبر عدد ممكن من الأقلام؟

الحل:

بالرغم من أن حل هذه المسألة بسيط جداً ولا تحتاج لتكوين متباينات وحلها إلا أن بساطة المسألة تجعلها مناسبة لنقطة بداية للبحث في حل أنواع أكثر تعقيداً من المسائل واستخدام مبادىء البرمجة الخطية لايجاد القيم الكبرى أو الصغرى.

(أ) نبدأ بترتيب المعلومات المعطاة في جدول ونفرض أن عدد الأقلام التي يجب شراؤها هي س من النوع الأول، ص من النوع الثاني.

	سعر القلم	عدد الأقلام	الثمن الكلي للأقلام
النوع الأول	٦ دنانير	س	٦ س
النوع الثاني	١٢ ديناراً	ص	١٢ ص

ما هي الشروط المفروضة على عملية شراء الأقلام؟

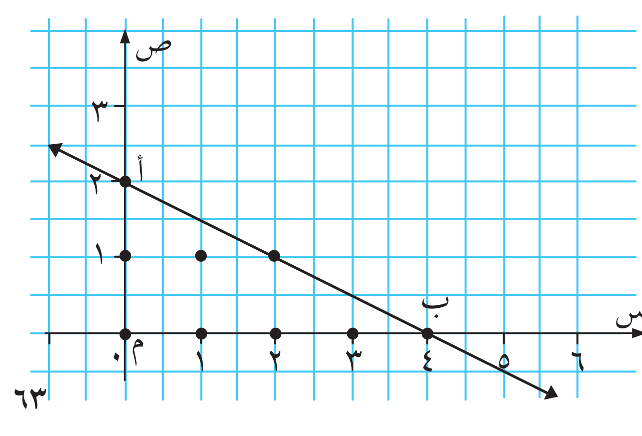
الشرط الأول: مجموع أثمان الأقلام المشتراة أقل من أو يساوي ٢٤ ديناراً، أي أن:

٦ س + ١٢ ص ⩽ ٢٤

الشرط الثاني: عدد الأقلام هو عدد طبيعي. أي أن:

س ∈ **ط**، وكذلك ص ∈ **ط**

يمثل الشكل المجاور مجموعة كل النقاط (س، ص) التي تحقق الشروط المفروضة وهي النقاط البارزة



وعددها ٩ نقاط في المنطقة المثلثية (م أ ب).

فمثلاً النقطة (١ ، ١) تمثل شراء قلم واحد من النوع الأول وقلم واحد من النوع الثاني ومجموع ثمنيهما يساوي ١ X ٦ + ١ X ١٢ = ١٨ ديناراً.

(ب) لإيجاد قيمة س ، ص ضمن منطقة الحل والتي تجعل المقدار (س + ص) أكبر ما يمكن، نفحص إمكانيات الحل السابقة، ويبين الجدول الآتي جميع الإمكانيات وقيمة المقدار (س + ص) المناظرة لكل منها:

النقطة (س ، ص)	(٠ ، ٠)	(١ ، ٠)	(٢ ، ٠)	(٣ ، ٠)	(٤ ، ٠)	(٠ ، ١)	(١ ، ١)	(٢ ، ١)	(٠ ، ٢)
المقدار (س+ص)	٠	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٢

من الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة للمقدار (س+ص) هي ٤ المناظرة لقيمة س = ٤ ، ص=٠

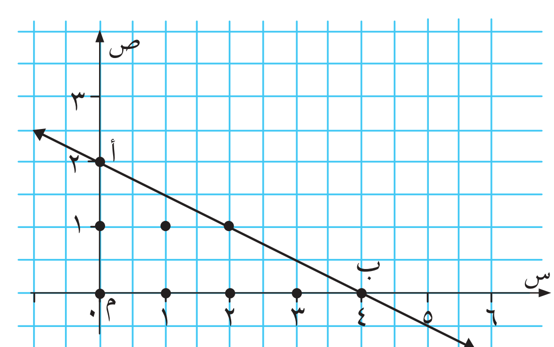
أي أن أكبر عدد من الأقلام يمكن شراؤه هو ٤ أقلام وجميعها من النوع الأول.

لاحظ أيضاً أن النقطة (٤ ، ٠) هي إحدى النقاط المتطرفة في منطقة الحل.

النقط المتطرفة هي: م (٠ ، ٠) حيث س + ص = ٠

أ (٠ ، ٢) حيث س + ص = ٢

ب (٤ ، ٠) حيث س + ص = ٤



وبوجه عام يكفي للبحث عن القيم العظمى أو الصغرى لمقدار ما أن نبحث في قيمة المقدار عند النقط المتطرفة في منطقة الحل (أي عند رؤوس المنطقة المضلعة التي تمثل منطقة الحل).

وكما ذكر سابقاً، يمكن حل المسألة ببساطة فشراء النوع الأرخص من الأقلام يعطينا الفرصة لشراء أكبر عدد منها، وحيث أن المتوفر هو ٢٤ ديناراً فيمكننا شراء ٤ أقلام من النوع الأول (الأرخص) والذي سعره ٦ دنانير للقلم الواحد. ■

مثال(٢) في مصنع سيارات خطا إنتاج : ينتج الخط الأول ٤ شاحنات و١٠ جرّافات في اليوم الواحد بكلفة انتاج مقدارها ١٤٠٠٠٠٠ دينار ، وينتج الخط الثاني ٨شاحنات و٥جرّافات في اليوم الواحد بكلفة انتاج مقدارها ١١٠٠٠٠٠دينار . فإذا استلم المصنع طلباً لتوريد ٢٨ شاحنة و٥٥جرّافة ، فكم يوماً يلزم تشغيل كل من الخطين لتلبية الطلب بأقل كلفة ممكنة؟

الحل:

نفرض أن عدد الأيام اللازمة لتشغيل الخطين الأول والثاني هما س ، ص يوماً على الترتيب

ينتج الخط الأول في س يوماً : ٤س شاحنة وَ ١٠س جرافة .

وينتج الخط الثاني في ص يوماً : ٨ص شاحنة وَ ٥ص جرافة .

نرتب المعلومات في الجدول الآتي :

	عدد الشاحنات	عدد الجرّافات
إنتاج الخط الأول	٤س	١٠س
إنتاج الخط الثاني	٨ص	٥ص
المجموع	٤س + ٨ص	١٠س + ٥ص
الكمية المطلوبة	٢٨	٥٥

ما هي الشروط على المتغيرين س ، ص؟

الشرط الأول : نلاحظ أن عدد الشاحنات المنتجة لتلبية الطلب يجب أن تكون ٢٨ أو أكثر (فلا ضرر من وجود بعض الزيادة) . أي أن : ٤س + ٨ص ≥ ٢٨

الشرط الثاني : نلاحظ أن عدد الجرافات المنتجة لتلبية الطلب يجب أن يساوي ٥٥ أو يزيد عنها .

أي أن : ١٠س + ٥ص ≥ ٥٥

الشرط الثالث : لا يمكن أن يكون عدد الأيام سالباً . أي أن س ≥ ٠ وكذلك ص ≥ ٠

وبهذا نحصل على نظام المتباينات الآتي :

٤س + ٨ص ≥ ٢٨
١٠س + ٥ص ≥ ٥٥
س ≥ ٠
ص ≥ ٠

أما كلفة الانتاج عند تشغيل الخط الأول س يوماً فهي : ١٤٠٠٠٠٠س ديناراً .

كما أن كلفة الانتاج عند تشغيل الخط الثاني ص يوماً فهي : ١١٠٠٠٠٠ص ديناراً .

وتؤول المسألة إلى جعل المقدار ١٤٠٠٠٠٠س + ١١٠٠٠٠٠ص والذي يسمى (اقتران الهدف) أقل ما يمكن .

المتباينة ٤س + ٨ص ≥ ٢٨ يمكن كتابتها : س + ٢ص ≥ ٧ (بقسمة كل حد على ٤) .

أما المتباينة ١٠س + ٥ص ≥ ٥٥ فيمكن كتابتها : ٢س + ص ≥ ١١ (بقسمة كل حد على ٥) .

وتمثل المنطقة المظللة في الشكل أدناه مجموعة الحل لنظام المتباينات .

ونحتاج إلى دراسة الاقتران الهدف (١٤٠٠٠٠٠س + ١١٠٠٠٠٠ص) عند ثلاث نقاط متطرفة من مجموعة الحل وأقل قيمة للاقتران تحدد قيمتي س ، ص . النقاط المتطرفة هي :

أ (٧، ٠) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٠ ، ١١)

والجدول التالي يلخص قيم اقتران الهدف عند هذه النقاط .

النقطة	س	ص	قيمة اقتران الهدف
أ	٧	٠	١٤٠٠٠٠٠ X ٧ + ٠ = ٩٨٠٠٠٠٠ دينار .
ب	٥	١	١٤٠٠٠٠٠ X ٥ + ١١٠٠٠٠٠ X ١ = ٨١٠٠٠٠٠
جـ	٠	١١	٠ + ١١٠٠٠٠٠ X ١١ = ١٢١٠٠٠٠٠ دينار .

ومن الجدول نجد أن أقل كلفة هي عند النقطة ب أي عندما يعمل الخط الأول ٥ أيام و يعمل الخط الثاني يوماً واحداً ■

مثال (٣) مصنع للمشروبات الخفيفة له فرعان للإنتاج، وينتج كل فرع ثلاثة أنواع من المشروبات وهي: شراب الليمون، وشراب البرتقال، وشراب التوت. وينتج الفرع الأول ٦ طن من شراب الليمون، ٥ طن من شراب البرتقال، ٤ طن من شراب التوت في اليوم الواحد، وكلفة تشغيل هذا الخط هي ٨٠٠ دينار في اليوم الواحد. كما ينتج الفرع الثاني ٢ طن من شراب الليمون، ١٥ طن من شراب البرتقال، ٤ طن من شراب التوت، وكلفة تشغيل الفرع الثاني هي ١٠٠٠ دينار في اليوم الواحد. فإذا استلم المصنع طلباً لتوريد ١٢ طناً من شراب الليمون، ٣٠ طناً من شراب البرتقال، ١٦ طناً من شراب التوت، فكم يوماً يُشغّل كل فرع لتلبية الطلب وبحيث تكون كلفة التشغيل أقل ما يمكن؟

الحل:

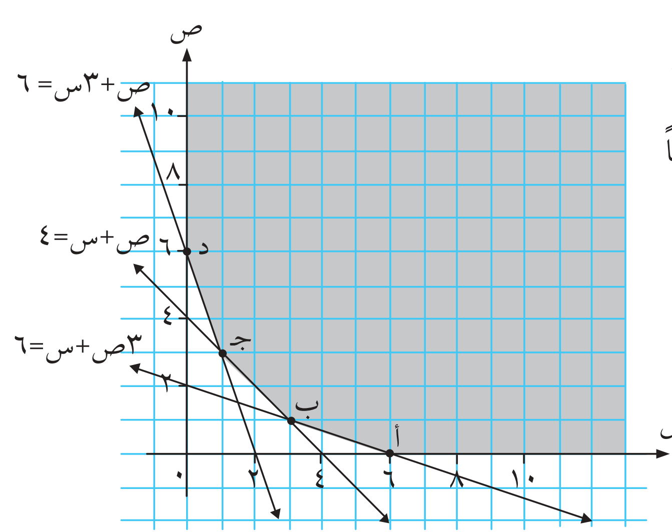
(١) نفرض أن عدد الأيام اللازمة لتشغيل المصنع لتلبية الطلب هي س يوماً من العمل في الفرع الأول، ص يوماً من العمل في الفرع الثاني.

	إنتاج الفرع الأول (طن)	إنتاج الفرع الثاني (طن)	الكمية المطلوبة (طن)
شراب الليمون	٦س	٢ص	١٢
شراب البرتقال	٥س	١٥ص	٣٠
شراب التوت	٤س	٤ص	١٦

(٢) نعبر عن قيود المسألة بنظام من المتباينات:

٦س + ٢ص ≤ ١٢ (لماذا؟)
٥س + ١٥ص ≤ ٣٠ (لماذا؟)
٤س + ٤ص ≤ ١٦ (لماذا؟)
س ≤ ٠ لأن عدد الأيام لا يكون سالباً
ص ≤ ٠ لأن عدد الأيام لا يكون سالباً

(٣) نمثل المتباينات بيانياً (أنظر الرسم المجاور)، وتكون المنطقة المظللة هي الحل.



(٤) نحدد اقتران الهدف الذي يمثل كلفة التشغيل لتلبية الطلب وهو المقدار : ٨٠٠س + ١٠٠٠ص دينار .

(٥) نحدد من الرسم النقاط المتطرفة وهي : (٦ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٠ ، ٦) .

(وللتحقق يمكن أيضاً تحديد كل نقطة من هذه النقاط جبرياً بحل معادلتي الخطين المستقيمين الذين يتقطعان في تلك النقطة) .

(٦) نحسب قيمة اقتران الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط وهي كما يلخصها الجدول الآتي :

النقطة	س	ص	قيمة اقتران الهدف
أ	٦	٠	٨٠٠س + ١٠٠٠ص = ٤٨٠٠ + ٠ = ٤٨٠٠ دينار .
ب	٣	١	٨٠٠س + ١٠٠٠ص = ٢٤٠٠ + ١٠٠٠ = ٣٤٠٠ دينار .
جـ	١	٣	٨٠٠س + ١٠٠٠ص = ٨٠٠ + ٣٠٠٠ = ٣٨٠٠ دينار .
د	٠	٦	٨٠٠س + ١٠٠٠ص = ٠ + ٦٠٠٠ = ٦٠٠٠ دينار .

(٧) نعين من الجدول إحداثيي النقطة التي تكون الكلفة عندها أقل ما يمكن . النقطة هي ب (٣ ، ١)
حيث س = ٣ ، ص = ١ ومعنى ذلك أننا نشغل الفرع الأول ٣ أيام ونشغل الفرع الثاني يوماً واحداً . ■

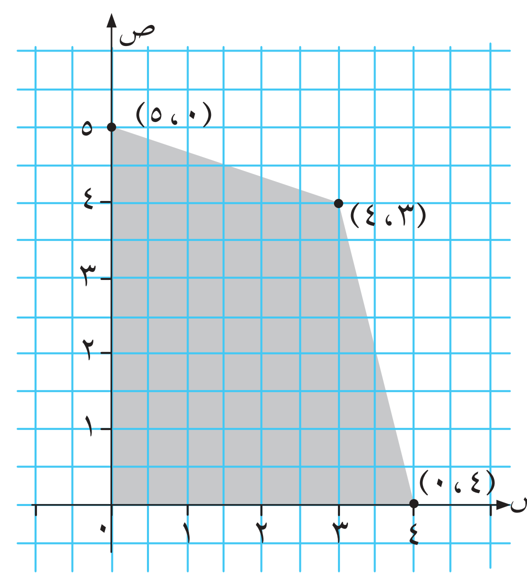
تمارين ومسائل (٣-٢)

١ المنطقة المظللة في الشكل المجاور تمثل مجموعة حل النظام :

$$\begin{cases} س \geq ٠ \\ ص \geq ٠ \\ س + ٣ص \leq ١٥ \\ ٤س + ص \leq ١٦ \end{cases}$$

أوجد القيمة العظمى والصغرى للمقدار (اقتران الهدف)

٣س + ٢ص



٢ جد مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي :

$$\begin{cases} س + ص \leqslant ٥ \\ ٢س + ص \leqslant ٦ \\ س + ٣ص \leqslant ٩ \\ س \leqslant ٠ \\ ص \leqslant ٠ \end{cases}$$

جد النقط المتطرفة ومن ثم حدد متى يكون اقتران الهدف **٤س + ٥ص** ضمن هذا النظام أقل ما يمكن .

٣ أوجد القيمة العظمى للمقدار **٢س + ٣ص** بشرط

$$\begin{cases} ٢س + ص \geqslant ١٥ \\ س + ٣ص \geqslant ٢٠ \\ س \leqslant ٠ \\ ص \leqslant ٠ \end{cases}$$

٤ في مصنع خطان لإنتاج البسكوت وكل منهما ينتج ثلاثة أنواع من البسكوت أ ، ب ، جـ وينتج الخط الأول يومياً ٣طن من النوع أ، طن واحد من النوع ب ، ٢طن من النوع جـ بكلفة إجمالية قدرها ٣٠٠ دينار . وينتج الخط الثاني يومياً ٢ طن من النوع أ، ٤طن من النوع ب، و ٥طن من النوع جـ بكلفة إجمالية ٤٠٠ دينار . تلقى المصنع طلباً مقداره ٢٦ طناً من النوع الأول، ٢١ طناً من النوع ب وَ ٣٢ طناً من النوع جـ.

كم يوماً يعمل كل خط انتاج لتلبية الطلب بأقل كلفة ممكنة، وما هي الكلفة الدنيا؟

نشاط إضافي:

١ ينتج مصنع نوعين من دراجات الأطفال أ ، ب . ويحقق المصنع ربحاً في النوع أ مقداره ١,٥ دينار للدراجة الواحدة، وفي النوع ب ربحاً مقداره ٢دينار للدراجة الواحدة . حدد المصنع القيود التالية على الإنتاج والتي اكتسبها من خبراته السابقة :

أولاً : مجموع الإنتاج الكلي يجب أن لا يزيد عن ١٢٠٠ دراجة شهرياً .

ثانياً : الطلب على النوع ب هو في حده الأقصى نصف الطلب على النوع أ .

ثالثاً : مستوى الإنتاج للنوع أ يمكن أن يزيد عن ثلاثة أضعاف مستوى الإنتاج من النوع ب بحد أقصى مقداره ٦٠٠ دراجة .

كم دراجة ينتج المصنع من كل من النوعين في الشهر الواحد حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن؟

٣-٣ الـدُفـعات Annuities

تمهيد : أصبحت المعاملات المالية والتجارية في هذا العصر أكثر تعقيداً مما كانت عليه في أي وقت مضى . وتجرى كثير من عمليات شراء الأسهم وبيعها في الأسواق الدولية الكترونيا عن طريق الانترنت ، كما يتابع كثير من المهتمين والمستثمرين أسعار الأسهم والعملات والمعادن النفيسة والسلع الأخرى من خلال النشرات الاقتصادية ووسائل الإتصال الإلكترونية حتى يتخذوا القرارات الملائمة بشأن إدارة تجارتهم وأعمالهم .

وجاء مع هذا التطور الكبير تنوع هائل في الخدمات التجارية وزيادة متسارعة في أعداد مُقدّمي هذه الخدمات . ويحتاج المواطن العادي إلى ثقافة مالية مناسبة حتى يستطيع المفاضلة بين التعامل مع بنك أو آخر أو التعامل مع شركة تأمين أو أخرى أو قبول خيار أو آخر لنفس البنك أو الشركة .

فقد يحتاج المواطن إلى اقتراض مبلغ من المال لبناء بيت أو لتأسيس مشروع تجاري أو دعم وتوسيع مشروع قائم . وتساعد معرفة المواطن في الحسابات المالية في تحسين قدرته على مشاركة موظف البنك في فهم الحسابات الخاصة به ومراجعتها ومتابعتها وفي اتخاذ القرارات وتحمل نتائج اختياره . فقد يكلفه الاقتراض دفع مبالغ تزيد كثيراً عما اقترضه .

من المعاملات المالية الشائعة ما يسمى **بالدفعات وهي مبالغ متساوية يوفرها شخص مثلاً ويودعها في البنك في فترات زمنية متساوية ليحصل على جملتها ، أو مبالغ متساوية تدفع في فترات زمنية متساوية لسداد قرض مثلاً .**

ومن المبادىء المهمة في الحسابات المالية نقصان قيمة النقود في المستقبل ، فقيمة المبلغ ١٠٠ دينار سنة ٢٠١٠ تقل عن قيمتها سنة ٢٠٠٠ ، بمعنى أن القدرة الشرائية للنقود تصبح أقل في المستقبل . وتدفع البنوك فائدة بنكية تساعد في التعويض عن نقص قيمة الأموال أو عن نقص القدرة الشرائية للنقود .

القيمة الحالية (Present Value) والقيمة المستقبلية (Future Value) لمبلغ من النقود (دفعة واحدة):

مثال (١): إذا وضع مبلغ ١٠٠ دينار في بنك بسعر الفائدة المركبة ٥٪ في السنة لمدة ٤ سنوات فإن جملة المبلغ بعد ٤ سنوات تسمى القيمة المستقبلية للمبلغ ١٠٠ دينار ، وهذه الجملة هي :

جـ = م(١ + ع)^ن

= ١٠٠ (١ + ٠,٠٥)^٤

= ١٠٠(١,٠٥)^٤ — باستخدام الحاسبة : المفتاح x^y حيث : $X = 1.05$ ، $y = 4$

= ١٠٠ x ١,٢١٥٥

= ١٢١,٥٥ دينار .

(راجع ملحق استخدام الآلة الحاسبة العلمية نهاية الكتاب)

أي أن القيمة المستقبلية لمبلغ ١٠٠ دينار (حسب الشروط السابقة) هي ١٢١,٥٥ دينار .
ويسمى مبلغ ١٠٠ دينار قيمة حالية للمبلغ ١٢١,٥٥ دينار (أي للقيمة المستقبلية) .

مثال (٢): وضع شخص مبلغاً من المال في بنك بسعر الربح المركب ٣٪ في السنة لمدة ٨ سنوات .
وقد أخبره موظف البنك أن المبلغ الذي سيقبضه بعد نهاية الفترة هو ٢٥٣٣,٥٤ دينار .
ما القيمة الحالية للمبلغ المستثمر؟

الحل:

$$ج = م(١+ع)^{ن}$$

$$٢٥٣٣,٥٤ = م(١ + ٠,٠٣)^{٨}$$

$$٢٥٣٣,٥٤ = م(١,٢٦٦٧٧)$$ (باستخدام الحاسبة العلمية)

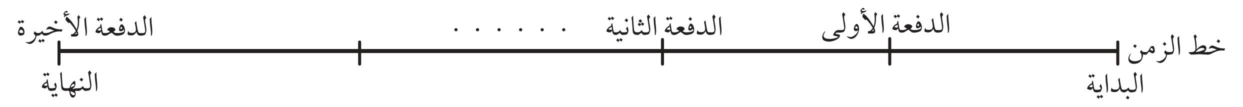
$$م = \frac{٢٥٣٣,٥٤}{١,٢٦٦٧٧} = ٢٠٠٠$$ دينار .

أنواع الدُفعات المتكررة:

هناك أنواع من الدفعات المتكررة، ولكننا سنهتم بالتمييز بين نوعين منها هما :

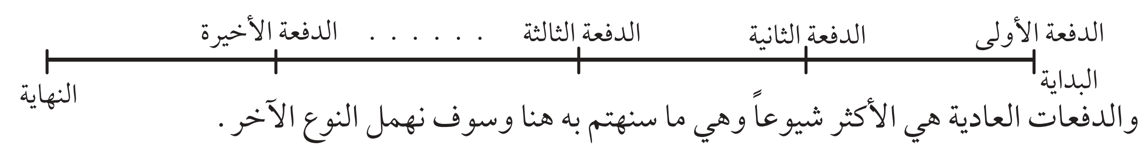
١ الدفعات العادية وتسمى أيضاً حوليات عادية (Ordinary Annuities)

ويكون الدفع في هذا النوع في نهاية كل فترة زمنية كما هو موضح في الشكل الآتي :



٢ الدفعات مقدماً وتسمى أيضاً حوليات مقدماً (Annuities Due)

وفي هذا النوع يتم الدفع في بداية الفترة الزمنية، كما هو موضح في الشكل الآتي :



والدفعات العادية هي الأكثر شيوعاً وهي ما سنهتم به هنا وسوف نهمل النوع الآخر .

القيمة المستقبلية والقيمة الحالية للدفعات العادية:

هناك نوعان من القيم ترتبط بالدفعات وهي :

(أ) القيمة المستقبلية للدفعات والتي تحسب بإيجاد جملة كل دفعة ومن ثم مجموع هذه الجمل . فإذا وفر شخص ١٠٠٠ دينار في بنك كل سنة لمدة ٥ سنوات فإن جملة أمواله بعد ٥ سنوات تسمى القيمة المستقبلية .

(ب) القيمة الحالية للدفعات والتي تمثل قيمة الدفعات عند بداية العملية . فإذا اقترض شخص مبلغاً من المال من بنك واتفق مع البنك على سداد القرض على ١٠ أقساط سنوية قيمة كل قسط ٨٠٠ دينار، فإن قيمة القرض الذي استلمه في البداية تعتبر قيمة حالية لجميع الدفعات والتي عددها ١٠ .

مثال (٣): يوفّر خالد ١٠٠ دينار في نهاية كل سنة ويضعها في بنك بسعر الربح المركب ٦٪ في السنة ويضاف سنوياً ولمدة ٤ سنوات . ما القيمة المستقبلية لتوفيراته (أي ما جملة توفيراته)؟

الحل:

التوفيرات أو الدفعات هي دفعات عادية . والدفعة الأخيرة لا تربح لأنها تودع عند نهاية المدة .

جملة الدفعة الأخيرة (الرابعة) = ١٠٠ دينار .

وجملة الدفعة قبل الأخيرة (الثالثة) = ١٠٠ (١,٠٦) = ١٠٦ دنانير .

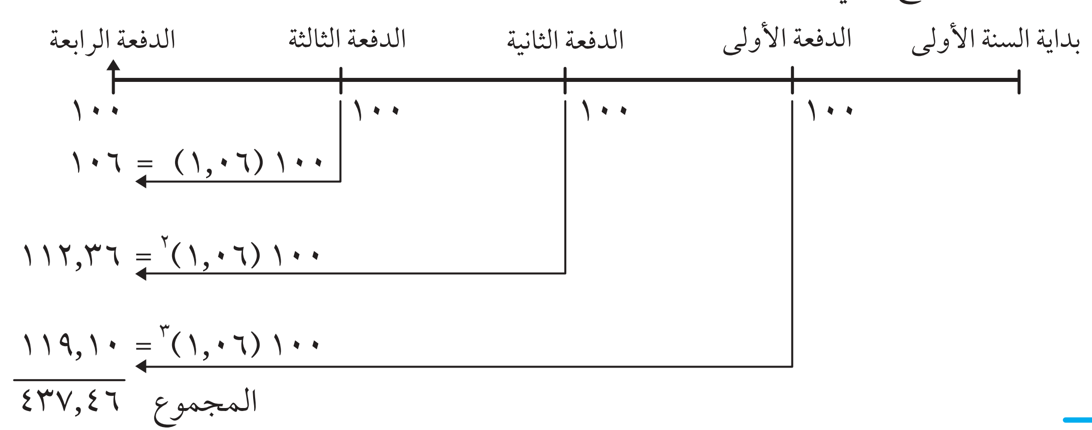
وجملة الدفعة الثانية = $١٠٠ (١,٠٦)^{٢}$ = ١١٢,٣٦ دينار .

جملة الدفعه الأولى = $١٠٠ (١,٠٦)^{٣}$ = ١١٩,١٠ دينار .

⟸ جملة جميع الدفعات = مجموع جمل كل منها

= ١٠٠ + ١٠٦ + ١١٢,٣٦ + ١١٩,١٠ = ٤٣٧,٤٦ دينار .

لاحظ التوضيح الآتي :



بوجه عام : القيمة المستقبلية لدفعات عادية عددها ن ، وقيمة كل منها م ديناراً بسعر الفائدة المركبة ع٪ في السنة تحسب كما يأتي :

القيمة المستقبلية للدفعة الأخيرة = م

القيمة المستقبلية للدفعه قبل الأخيرة = م(١ + ع)

.

.

.

القيمة المستقبلية للدفعة الثانية = $م(١ + ع)^{ن-٢}$

القيمة المستقبلية للدفعة الأولى = $م(١ + ع)^{ن-١}$

⟸ القيمة المستقبلية لجميع الدفعات = م + م(١+ع) + . . . + $م(١+ع)^{ن-٢}$ + $م(١ + ع)^{ن-١}$

وهذه متسلسلة هندسية حدها الأول م و أساسها (١ + ع) وعدد حدودها ن ويكون المجموع كما يأتي :

$$جـ = \frac{م[(١ + ع)^{ن} - ١]}{ع}$$

قاعدة:

القيمة المستقبلية لدفعات عادية عددها ن وقيمة كل منها م ديناراً بسعر الفائدة المركبة ع٪ في السنة تعطى

بالقاعدة : ق المستقبلية $= \frac{م[(١ + ع)^{ن} - ١]}{ع}$

وإذا استخدمت هذه القاعدة في حل مثال (٣) نجد أن $ج = \frac{١٠٠ [(١,٠٦)^{٤} - ١]}{٠,٠٦}$

$ج = \frac{١٠٠ (١,٢٦٢٥ - ١)}{٠,٠٦}$

ج = ٤٣٧,٥ دينار ، أي أنه يساوي تقريباً

الجواب السابق .

مثال (٤): اقترضت هند مبلغا من المال من بنك بسعر الفائدة المركبة ٨٪ في السنة وتضاف سنوياً . واتفقت مع البنك على سداد القرض على ٥ أقساط سنوية متساوية قيمة كل قسط ١٠٠٠ دينار . ما قيمة القرض؟

الحل:

قيمة القرض هي القيمة الحالية لجميع الأقساط :

القيمة الحالية للقسط الأول × ١,٠٨ = ١٠٠٠

⟸ القيمة الحالية للقسط الأول $= \frac{١٠٠٠}{١,٠٨} =$ ٩٢٥,٩٣ دينار

وبنفس الطريقة تكون القيمة الحالية للقسط الثاني $= \frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٢}} =$ ٨٥٧,٣٤ دينار

وللقسط الثالث $= \frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٣}} =$ ٧٩٣,٨٣ دينار ، وللقسط الرابع $= \frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٤}} =$ ٧٣٥,٠٣ دينار

وللقسط الخامس $= \frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٥}} =$ ٦٨٠,٥٨ دينار

القيمة الحالية لجميع الأقساط (قيمة القرض) = مجموع القيمة الحالية لكل منها

= ٩٢٥,٩٣ + ٨٥٧,٣٤ + ٧٩٣,٨٣ + ٧٣٥,٠٣ + ٦٨٠,٥٨

= ٣٩٩٢,٧١ دينار .

أنظر التوضيح الاتي :

١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠

القسط الخامس | القسط الرابع | القسط الثالث | القسط الثاني | القسط الأول

$\frac{١٠٠٠}{١,٠٨} =$ ٩٢٥,٩٣

$\frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٢}} =$ ٨٥٧,٣٤

$\frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٣}} =$ ٧٩٣,٨٣

$\frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٤}} =$ ٧٣٥,٠٣

$\frac{١٠٠٠}{(١,٠٨)^{٥}} =$ ٦٨٠,٥٨

٣٩٩٢,٧١

وبوجه عام :

القيمة الحالية لدفعات متساوية قيمة كل منها م ديناراً لفترات عددها ن بسعر الفائدة المركبة السنوية ع ٪هي :

$$\text{القيمة الحالية} = \frac{م}{(١ + ع)} + \frac{م}{(١ + ع)^{٢}} + \cdots\cdots + \frac{م}{(١ + ع)^{ن}}$$

وهذه متسلسلة هندسية حدها الأول = $\frac{م}{١ + ع}$ ، وأساسها $\frac{١}{١ + ع}$، وعدد حدودها ن

$$\text{فيكون مجموعها} = \frac{م[١ - (١ + ع)^{-ن}]}{ع}$$

قاعدة:

القيمة الحالية لدفعات عادية قيمة كل منها م بسعر الفائدة المركبة ع٪ سنوياً لمدة ن سنة هي : $\frac{م[١ - (١ + ع)^{-ن}]}{ع}$

وإذا استخدمت هذه القاعدة في حل مثال (٤) نجد :

$$\text{القيمة الحالية} = \frac{١٠٠٠[١ - (١,٠٨)^{-٥}]}{٠,٠٨}$$

$= \frac{١٠٠٠ \times (١ - ٠,٦٨٠٦)}{٠,٠٨} =$ ٣٩٩٢,٥ دينار ، أي أنه يساوي تقريباً الجواب السابق

مثال (٥): اقترض تاجر مبلغ ٥٠٠٠٠ دينار ، واتفق مع البنك على أن يتم السداد على ١٠ دفعات (أقساط) سنوية متساوية . فإذا كان سعر الفائدة المركبة ٦٪ في السنة ، ما قيمة الدفعة الواحدة؟

الحل:

القيمة الحالية = $\frac{م[١ - (١ + ع)^{-ن}]}{ع}$

$٥٠٠٠٠ = \frac{م[١ - (١,٠٦)^{-١٠}]}{٠,٠٦}$

$٥٠٠٠٠ = م[٧,٣٦]$

م = $\frac{٥٠٠٠٠}{٧,٣٦}$ = ٦٧٩٣,٤ ، أي أن قيمة كل قسط تساوي ٦٧٩٣,٤ دينار .

نلاحظ أنه مقابل ٥٠٠٠٠ دينار (قيمة القرض) فإن هذا التاجر سوف يدفع ٦٧٩٣,٤ X ١٠ = ٦٧٩٣٤ دينار لسداد الدين . ■

مثال (٦): اقترضت فاطمة ٢٤٠٠ دينار من البنك على أن تسدد القرض على دفعات شهرية متساوية خلال سنة من تاريخ الاقتراض ، فإذا كان هذا البنك يحسب الفائدة بسعر ٦٪ في السنة وتضاف كل شهر فما قيمة الدفعة (قسط السداد) الشهرية؟

الحل:

سعر الفائدة في الشهر = $\frac{٠,٠٦}{١٢}$ = ٠,٠٠٥ ، عدد الأشهر (الفترات) = ١٢

القيمة الحالية = $\frac{م[١ - (١ + ع)^{-ن}]}{ع}$

$٢٤٠٠ = \frac{م[١ - (١ + ٠,٠٠٥)^{-١٢}]}{٠,٠٠٥}$

$٢٤٠٠ = \frac{م[١ - ٠,٩٤١٩]}{٠,٠٠٥}$

م = $\frac{٢٤٠٠ \times ٠,٠٠٥}{٠,٠٥٨١}$ = ٢٠٦,٥٦ دينار . ■

استخدام الجداول لايجاد القيمة المستقبلية للدُفعات

تحسب القيمة المستقبلية للدفعات العادية من القاعدة الآتية :

$$\text{ق مستقبلية} = \frac{\text{م}[(1 + \text{ع})^{\text{ن}} - 1]}{\text{ع}}$$

ولتسهيل الحسابات الخاصة بالقيمة المستقبلية أنشئت جداول تعطي القيمة المستقبلية لدفعات كل منها تساوي وحدة نقود واحدة أي ديناراً واحداً مثلاً بسعر ع ولفترات عددها ن لقيم مختلفة للمتغير ع والمتغير ن . بتطبيق القاعدة :

$$\text{ق مستقبلية} = \frac{1[(1 + \text{ع})^{\text{ن}} - 1]}{\text{ع}} = \frac{(1 + \text{ع})^{\text{ن}} - 1}{\text{ع}}$$

ولايجاد القيمة المستقبلية لمبلغ م نضرب هذا المبلغ بالقيمة المستقبلية للدفعات التي كل منها وحدة واحدة وفيما يأتي مقطع من الجدول (الجدول الكامل معطى في ملحق رقم(١) في نهاية الكتاب) .

القيمة المستقبلية لدفعات كل منها وحدة نقود

عدد الفترات	سعر الفائدة			
	٣٪	٤٪	٥٪	٦٪
١	١	١	١	١
٢	٢,٠٣٠٠	٢,٠٤٠٠	٢,٠٥٠٠	٢,٠٦٠٠
٣	٣,٠٩٠٩	٣,١٢١٦	٣,١٥٢٥	٣,١٨٣٦
٤	٤,١٨٣٦	٤,٢٤٦٥	٤,٣١٠١	٤,٣٧٤٦
٥	٥,٣٠٩١	٥,٤١٦٣	٥,٥٢٥٦	٥,٦٣٧١
٦	٦,٤٦٨٤	٦,٦٣٣٠	٦,٨٠١٩	٦,٩٧٥٣
٧	٧,٦٦٢٥	٧,٨٩٨٣	٨,١٤٢٠	٨,٣٩٣٨
٨	٨,٨٩٢٣	٩,٢١٤٢	٩,٥٤٩١	٩,٨٩٧٥

ويبين الجدول أن القيمة المستقبلية لدفعات عددها ٥ بسعر فائدة مقداره ٦٪ وقيمة كل منها دينار واحد هي ٥,٦٣٧١ دينار . فإذا أردنا ايجاد القيمة المستقبلية لدفعات متساوية كل منها ٦٠٠ دينار بنفس السعر (٦٪)، ولنفس الفترة الزمنية (٥فترات)، فإن هذه القيمة تساوي ٦٠٠ X٥,٦٣٧١ أي ٣٣٨٢,٢٦ دينار .

تمرين (١):

من الجدول في نهاية الكتاب، جد القيمة المستقبلية لدفعات متساوية عددها ١٠ وقيمة كل منها ٤٠٠دينار وبفائدة مركبة مقدارها ٨٪ .

تمرين (٢):

باستخدام الجداول، جد جملة توفيرات سنوية متساوية قيمة كل منها ٨٠٠ دينار بسعر الفائدة ٥٪ لمدة ١٠ سنوات .

استخدام الجداول لايجاد القيمة الحالية للدفعات

تحسب القيمة الحالية للدفعات من المعادلة :

$$\text{ق حالية} = \frac{\text{م}[1-(1+\text{ع})^{-\text{ن}}]}{\text{ع}}$$

ولتسهيل الحسابات الخاصة بالقيمة الحالية أنشئت جداول تعطي القيمة الحالية لدفعات متساوية وقيمة كل منها وحدة نقود واحدة وبسعر ع ولفترات عددها ن، وفق القاعدة :

$$\text{ق حالية} = \frac{1[1-(1+\text{ع})^{-\text{ن}}]}{\text{ع}}$$

ولايجاد القيمة الحالية لمبلغ م نضرب هذا المبلغ بالقيمة الحالية للدفعات التي كل منها وحدة نقود واحدة .

القيمة الحالية= م X العدد المقابل في الجدول .

وفيما يأتي مقطع من الجدول الخاص بالقيمة الحالية (الجدول الكامل موجود في ملحق رقم (٢) في نهاية الكتاب) .

القيمة الحالية لدفعات كل منها وحدة نقود

عدد الفترات	سعر الفائدة			
	٣٪	٤٪	٥٪	٦٪
١	٠,٩٧٠٩	٠,٩٦١٥	٠,٩٥٢٤	٠,٩٤٣٤
٢	١,٩١٣٥	١,٨٨٦١	١,٨٥٩٤	١,٨٣٣٤
٣	٢,٨٢٨٦	٢,٧٧٥١	٢,٧٢٣٢	٢,٦٧٣٠
٤	٣,٧١٧١	٣,٦٢٩٩	٣,٥٤٦٠	٣,٤٦٥١
٥	٤,٥٧٩٧	٤,٤٥١٨	٤,٣٢٩٥	٤,٢١٢٤
٦	٥,٤١٧٢	٥,٢٤٢١	٥,٠٧٥٧	٤,٩١٧٣
٧	٦,٢٣٠٣	٦,٠٠٢١	٥,٧٨٦٤	٥,٥٨٢٤
٨	٧,٠١٩٧	٦,٧٣٢٧	٦,٤٦٣٢	٦,٢٠٩٨
٩	٧,٧٨٦١	٧,٤٣٥٣	٧,١٠٧٨	٦,٨٠١١٧
١٠	٨,٥٣٠٢	٨,١١٠٩	٧,٧٢١٧	٧,٣٦٠١

ويبين الجدول أن القيمة الحالية لدفعات متساوية مقدار كل منها ١ دينار وعددها ٩ بسعر ٥٪ في السنة مثلاً هي ٧,١٠٧٨ دينار . فإذا كان المبلغ ١٠٠٠ دينار (قيمة كل دفعة ١٠٠٠ دينار) فإننا نضرب المعامل ٧,١٠٧٨ بالمبلغ لنجد القيمة الحالية للدفعات التي قيمة كل منها ١٠٠٠ دينار .

القيمة الحالية = ١٠٠٠ X ٧,١٠٧٨ = ٧١٠٧,٨ دينار .

تمرين (١):

باستخدام الجداول جد القيمة الحالية لعشر دفعات متساوية كل منها ٨٠٠ ديناربسعر الفائدة ٦٪ في السنة .

تمرين (٢):

اقترض تاجر مبلغاً من المال واتفق مع البنك على سداد القرض على ثمانية أقساط سنوية متساوية قيمة كل قسط منها ١٠٠٠٠ دينار وبسعر الفائدة المركبة ٨٪ في السنة . ما قيمة القرض؟

(استخدم الجداول في الحل) .

تمارين ومسائل (٣-٣)

١ يوفر أحمد ٦٠٠٠ دينار كل سنة ويضعها في بنك بسعر الربح المركب ٤٪ في السنة ويضاف الربح سنوياً.
ما جملة توفيرات أحمد بعد ١٠ سنوات؟

٢ اقترضت هند ٦٠٠٠٠ دينار لاستخدامها في بناء بيت، فإذا كانت شركة العقارات المقرضة تحسب الفائدة السنوية ٩٪ في السنة وتضاف كل سنة، واتفقت مع هند على سداد القرض على دفعات سنوية متساوية على فترة عشرين عاماً فما مقدار كل دفعة سنوية؟

٣ اقترض تاجر ٢٠٠٠٠ ديناراً ويريد سدادها على دفعات سنوية تنتهي بعد ١٠ سنوات من بداية الاقتراض فإذا كان البنك المقرض يحسب سعر الفائدة المركبة ٨٪ في السنة تضاف كل سنة، فما مقدار كل دفعة من الدفعات المتساوية؟

٤ تريد سعاد اقتراض ٢٠٠٠٠ دينار من بنك سعر الفائدة المركبة ٨٪ في السنة وتضاف شهرياً، كما ترغب في سداد المبلغ خلال سنتين من تاريخ الاقتراض وعلى دفعات شهرية متساوية. فما قيمة كل دفعة شهرية؟

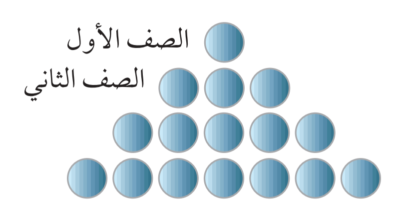
٥ ما القيمة المستقبلية لدفع شهرية متساوية عددها ٦٣ وقيمة كل منها ١٠٠ دينار إذا كان سعر الفائدة السنوية المركبة ٥٪ في السنة وتضاف كل شهر؟

مراجعة عامة:

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية : $ح_١ = ٣$ ، $ح_{ن+١} = ٢(ح_ن - ١)$

٢ ما مجموع مضاعفات العدد ٧ والتي تقل عن ١٠٠٠؟ .

٣ يمثل الشكل المجاور كرات مرتبة في صفوف . إذا استمر تشكيل الصفوف بنفس النمط حتى تكوّن ثلاثون صفاً .



(أ) جد عدد الكرات في الصف الثلاثين .

(ب) جد عدد جميع الكرات التي استخدمت في تكوين جميع الصفوف .

(جـ) بين أن عدد الكرات في أول ن صفاً هو $ن^٢$.

٤ انساب الماء من صنبور في حوض بمقدار ١٠ لتر في الساعة الأولى ثم أخذ يتزايد معدل الانسياب بمقدار ٢لتر في كل ساعة تالية . إذا كانت سعة الحوض ١٣٦ لتراً فما الزمن الذي لزم لامتلاء الحوض؟

٥ حل كلاً من المتباينتين الآتيتين في ح ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

(أ) $٢س + ١ \geqslant س - ٢$

(ب) $-٣ < ٤س + ٥ < ٧$

٦ حل بيانيا النظام :

$$\begin{cases} ص \geqslant ٢س + ١ \\ س + ص \leqslant ١٥ \\ س \geqslant ٠ \\ ٠ \leqslant ص \leqslant ٥ \end{cases}$$

ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للمقدار $٣س + ٥ص$ ضمن هذه الشروط .

٧ يخلط مزارع نوعين من الغذاء لماشيته : النوع الأول ثمن الكيس الواحد منه ٢٥ ديناراً ويحوي وحدتين من العنصر الغذائي أ ووحدتين من العنصر ب ووحدتين من العنصر جـ . النوع الثاني ثمن الكيس الواحد منه ٢٠ ديناراً ويحوي وحدة واحدة من العنصر أ، ٩ وحدات من ب، ٣ وحدات من جـ . كم كيساً من كل نوع يخلطها المزارع لتكون التكاليف أقل ما يمكن وبحيث يحوي الخليط الناتج على الأقل ١٢ وحدة من العنصر أ ، ٣٦ وحدة من ب، ٢٤ وحدة من جـ؟

٨ أوجد القيمة المستقبلية لحوليه عادية نصف سنوية قيمتها ١٠٠ دينار ومعدل الفائدة المركبة ٤٪ سنوياً بعد مرور ١٠ سنوات.

٩ أوجد القيمة الحالية لحولية عادية قيمتها ٤٠٠ دينار ربع سنوية على مدار ٥ سنوات بفائدة مركبة ٦٪ سنوياً.

١٠ وجد أن ٠,٤ من المراجعين في عيادة طبية يشكون من ارتفاع ضغط الدم، وأن ٠,٢ من المراجعين يشكون من مرض الكبد، وأن ٠,١ من المراجعين يشكون من المرضين معاً.
هل ارتفاع ضغط الدم ومرض الكبد مستقلان؟

تمارين إضافية

١ متتالية مجموع ن من حدودها يعطى بالقاعدة: $ح_{ن} = \frac{٣ن}{٢}(٧-ن)$ لجميع قيم ن الطبيعية.
أثبت أن المتتالية حسابية ثم أوجد $ح_{ن}$.

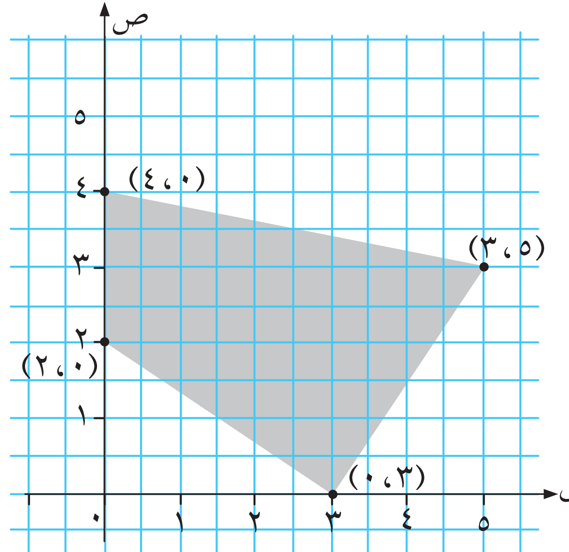
٢ يدرس مساق علم الاجتماع في إحدى الجامعات الفلسطينية ٤٠ طالباً وطالبة منهم ١٥ من كلية العلوم، ١٠ من كلية العلوم الإدارية والباقي من كلية الآداب. من خلال السجلات السابقة في الجامعة تبين أن نسبة النجاح في هذا المساق بين طلبة العلوم هي ٨٠٪، وبين طلبة العلوم الإدارية هي ٧٠٪، وبين طلبة الآداب هي ٩٠٪. اختير أحد الطلبة الذين يدرسون هذا المساق عشوائياً، فما هو احتمال أن يكون/ تكون من الناجحين/ الناجحات فيه؟

٣ المنطقة المظللة في الشكل المجاور
تمثل مجموعة حل النظام:

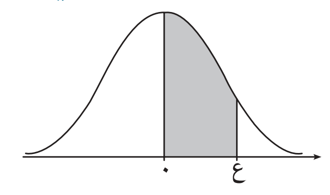
$$\begin{cases} س \geqslant ٠ \\ ٢س + ٣ص \geqslant ٦ \\ ٣س - ٢ص \leqslant ٩ \\ س + ٥ص \leqslant ٢٠ \end{cases}$$

أوجد القيمة العظمى والصغرى للمقدار (اقتران الهدف)

$٤س + ٣ص$



ملحق (١): المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين صفر ، ع



ع	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٤
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٨	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٨	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١٢	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٦	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٧٢٥	٠,٣٧٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٣	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٥	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨
٣,٦	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩
٣,٧	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩
٣,٨	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩
٣,٩	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٠٠

ملحق (٢): القيمة المستقبلية لدفعات مقدار كل منها الوحدة

عدد الفترات	سعر فائدة									
	٪١	٪٢	٪٣	٪٤	٪٥	٪٦	٪٧	٪٨	٪٩	٪١٠
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
٢	٢,٠١٠٠	٢,٠٢٠٠	٢,٠٣٠٠	٢,٠٤٠٠	٢,٠٥٠٠	٢,٠٦٠٠	٢,٠٧٠٠	٢,٠٨٠٠	٢,٠٩٠٠	٢,١٠٠٠
٣	٣,٠٣٠١	٣,٠٦٠٤	٣,٠٩٠٩	٣,١٢١٦	٣,١٥٢٥	٣,١٨٣٦	٣,٢١٤٩	٣,٢٤٦٤	٣,٢٧٨١	٣,٣١٠٠
٤	٤,٠٦٠٤	٤,١٢١٦	٤,١٨٣٦	٤,٢٤٦٥	٤,٣١٠١	٤,٣٧٤٦	٤,٤٣٩٩	٤,٥٠٦١	٤,٥٧٣١	٤,٦٤١٠
٥	٥,١٠١٠	٥,٢٠٤٠	٥,٣٠٩١	٥,٤١٦٣	٥,٥٢٥٦	٥,٦٣٧١	٥,٧٥٠٧	٥,٨٦٦٦	٥,٩٨٤٧	٦,١٠٥١
٦	٦,١٥٢٠	٦,٣٠٨١	٦,٤٦٨٤	٦,٦٣٣٠	٦,٨٠١٩	٦,٩٧٥٣	٧,١٥٣٣	٧,٣٣٥٩	٧,٥٢٣٣	٧,٧١٥٦
٧	٧,٢١٣٥	٧,٤٣٤٣	٧,٦٦٢٥	٧,٨٩٨٣	٨,١٤٢٠	٨,٣٩٣٨	٨,٦٥٤٠	٨,٩٢٢٨	٩,٢٠٠٤	٩,٤٨٧٢
٨	٨,٢٨٥٧	٨,٥٨٣٠	٨,٨٩٢٣	٩,٢١٤٢	٩,٥٤٩١	٩,٨٩٧٥	١٠,٢٥٩٨	١٠,٦٣٦٦	١١,٠٢٨٥	١١,٤٣٥٩
٩	٩,٣٦٨٥	٩,٧٥٤٦	١٠,١٥٩١	١٠,٥٨٢٨	١١,٠٢٦٦	١١,٤٩١٣	١١,٩٧٨٠	١٢,٤٨٧٦	١٣,٠٢١٠	١٣,٥٧٩٥
١٠	١٠,٤٦٢٢	١٠,٩٤٩٧	١١,٤٦٣٩	١٢,٠٠٦١	١٢,٥٧٧٩	١٣,١٨٠٨	١٣,٨١٦٤	١٤,٤٨٦٦	١٥,١٩٢٩	١٥,٩٣٧٤
١١	١١,٥٦٦٨	١٢,١٦٨٧	١٢,٨٠٧٨	١٣,٤٨٦٤	١٤,٢٠٦٨	١٤,٩٧١٦	١٥,٧٨٣٦	١٦,٦٤٥٥	١٧,٥٦٠٣	١٨,٥٣١٢
١٢	١٢,٦٨٢٥	١٣,٤١٢١	١٤,١٩٢٠	١٥,٠٢٥٨	١٥,٩١٧١	١٦,٨٦٩٩	١٧,٨٨٨٥	١٨,٩٧٧١	٢٠,١٤٠٧	٢١,٣٨٤٣
١٣	١٣,٨٠٩٣	١٤,٦٨٠٣	١٥,٦١٧٨	١٦,٦٢٦٨	١٧,٧١٣٠	١٨,٩٩٢١	٢٠,١٤٠٦	٢١,٤٩٥٣	٢٢,٩٥٣٤	٢٤,٥٢٢٧
١٤	١٤,٩٤٧٤	١٥,٩٧٣٩	١٧,٠٨٦٣	١٨,٢٩١٩	١٩,٥٩٨٦	٢١,٠١٥١	٢٢,٥٥٠٥	٢٤,٢١٤٩	٢٦,٠١٩٢	٢٧,٩٧٥٠
١٥	١٦,٠٩٦٩	١٧,٢٩٣٤	١٨,٥٩٨٩	٢٠,٠٢٣٦	٢١,٥٧٨٦	٢٣,٢٧٦٠	٢٥,١٢٩٠	٢٧,١٥٢١	٢٩,٣٦٠٩	٣١,٧٧٢٥
١٦	١٧,٢٥٧٩	١٨,٦٣٩٣	٢٠,١٥٦٩	٢١,٨٢٤٥	٢٣,٦٥٧٥	٢٥,٦٧٢٥	٢٧,٨٨٨١	٣٠,٣٢٤٣	٣٣,٠٠٣٤	٣٥,٩٤٩٧
١٧	١٨,٤٣٠٤	٢٠,٠١٢١	٢١,٧٦١٦	٢٣,٦٩٧٥	٢٥,٨٤٠٤	٢٨,٢١٢٩	٣٠,٨٤٠٢	٣٣,٧٥٠٢	٣٦,٩٧٣٧	٤٠,٥٤٤٧
١٨	١٩,٦١٤٧	٢١,٤١٢٣	٢٣,٤١٤٤	٢٥,٦٤٥٤	٢٨,١٣٢٤	٣٠,٩٠٥٧	٣٣,٩٩٩٠	٣٧,٤٥٠٢	٤١,٣٠١٣	٤٥,٥٩٩٢
١٩	٢٠,٨١٠٩	٢٢,٨٤٠٦	٢٥,١١٦٩	٢٧,٦٧١٢	٣٠,٥٣٩٠	٣٣,٧٦٠٠	٣٧,٣٧٩٠	٤١,٤٤٦٣	٤٦,٠١٨٥	٥١,١٥٩١
٢٠	٢٢,٠١٩٠	٢٤,٢٩٧٤	٢٦,٨٧٠٤	٢٩,٧٧١٨	٣٣,٠٦٦٠	٣٦,٧٨٥٦	٤٠,٩٩٥٥	٤٥,٧٦٢٠	٥١,١٦٠١	٥٧,٢٧٥٠

القيمة الحالية = مبلغ الدفعة (قسط التوفير مثلا) X المعامل من الجدول

ملحق (٣): القيمة الحالية لدفعات كل منها الوحدة

عدد الفترات	سعر فائدة									
	٪١	٪٢	٪٣	٪٤	٪٥	٪٦	٪٧	٪٨	٪٩	٪١٠
١	٠,٩٩٠١	٠,٩٨٠٤	٠,٩٧٠٩	٠,٩٦١٥	٠,٩٥٢٤	٠,٩٤٣٤	٠,٩٣٤٦	٠,٩٢٥٩	٠,٩١٧٤	٠,٩٠٩١
٢	١,٩٧٠٤	١,٩٤١٦	١,٩١٣٥	١,٨٨٦١	١,٨٥٩٤	١,٨٣٣٤	١,٨٠٨٠	١,٧٨٣٣	١,٧٥٩١	١,٧٣٥٥
٣	٢,٩٤١٠	٢,٨٨٣٩	٢,٨٢٨٦	٢,٧٧٥١	٢,٧٢٣٢	٢,٦٧٣٠	٢,٦٢٤٣	٢,٥٧٧١	٢,٥٣١٣	٢,٤٨٦٩
٤	٣,٩٠٢٠	٣,٨٠٧٧	٣,٧١٧١	٣,٦٢٩٩	٣,٥٤٦٠	٣,٤٦٥١	٣,٣٨٧٢	٣,٣١٢١	٣,٢٣٩٧	٣,١٦٩٩
٥	٤,٨٥٣٤	٤,٧١٣٥	٤,٥٧٩٧	٤,٤٥١٨	٤,٣٢٩٥	٤,٢١٢٤	٤,١٠٠٢	٣,٩٩٢٧	٣,٨٨٩٧	٣,٧٩٠٨
٦	٥,٧٩٥٥	٥,٦٠١٤	٥,٤١٧٢	٥,٢٤٢١	٥,٠٧٥٧	٤,٩١٧٣	٤,٧٦٦٥	٤,٦٢٢٩	٤,٤٨٥٩	٤,٣٥٥٣
٧	٦,٧٢٨٢	٦,٤٧٢٠	٦,٢٣٠٣	٦,٠٠٢١	٥,٧٨٦٤	٥,٥٨٢٤	٥,٣٨٩٣	٥,٢٠٦٤	٥,٠٣٣٠	٤,٨٦٨٤
٨	٧,٦٥١٧	٧,٣٢٥٥	٧,٠١٩٧	٦,٧٣٢٧	٦,٤٦٣٢	٦,٢٠٩٨	٥,٩٧١٣	٥,٧٤٦٦	٥,٥٣٤٨	٥,٣٣٤٩
٩	٨,٥٦٦٠	٨,١٦٢٢	٧,٧٨٦١	٧,٤٣٥٣	٧,١٠٧٨	٦,٨٠١٧	٦,٥١٥٢	٦,٢٤٦٩	٥,٩٩٥٢	٥,٧٥٩٠
١٠	٩,٤٧١٣	٨,٩٨٢٦	٨,٥٣٠٢	٨,١١٠٩	٧,٧٢١٧	٧,٣٦٠١	٧,٠٢٣٦	٦,٧١٠١	٦,٤١٧٧	٦,١٤٤٦
١١	١٠,٣٦٧٦	٩,٧٨٦٨	٩,٢٥٢٦	٨,٧٦٠٥	٨,٣٠٦٤	٧,٨٨٦٩	٧,٤٩٨٧	٧,١٣٩٠	٦,٨٠٥٢	٦,٤٩٥١
١٢	١١,٢٥٥١	١٠,٥٧٥٣	٩,٩٥٤٠	٩,٣٨٥١	٨,٨٦٣٣	٨,٣٨٣٨	٧,٩٤٢٧	٧,٥٣٦١	٧,١٦٠٧	٦,٨١٣٧
١٣	١٢,١٣٣٧	١١,٣٤٨٤	١٠,٦٣٥٠	٩,٩٨٥٦	٩,٣٩٣٦	٨,٨٥٢٧	٨,٣٥٧٧	٧,٩٠٣٨	٧,٤٨٦٩	٧,١٠٣٤
١٤	١٣,٠٠٣٧	١٢,١٠٦٢	١١,٢٩٦١	١٠,٥٦٣١	٩,٨٩٨٦	٩,٢٩٥٠	٨,٧٤٥٥	٨,٢٤٤٢	٧,٧٨٦٢	٧,٣٦٦٧
١٥	١٣,٨٦٥١	١٢,٨٤٩٣	١١,٩٣٧٩	١١,١١٨٤	١٠,٣٧٩٧	٩,٧١٢٢	٩,١٠٧٩	٨,٥٥٩٥	٨,٠٦٠٧	٧,٦٠٦١
١٦	١٤,٧١٧٩	١٣,٥٧٧٧	١٢,٥٦١١	١١,٦٥٢٣	١٠,٨٣٧٨	١٠,١٠٥٩	٩,٤٤٦٦	٨,٨٥١٤	٨,٣١٢٦	٧,٨٢٣٧
١٧	١٥,٥٦٢٣	١٤,٢٩١٩	١٣,١٦٦١	١٢,١٦٥٧	١١,٢٧٤١	١٠,٤٧٧٣	٩,٧٦٣٢	٩,١٢١٦	٨,٥٤٣٦	٨,٠٢١٦
١٨	١٦,٣٩٨٣	١٤,٩٩٢٠	١٣,٧٥٣٥	١٢,٦٥٩٣	١١,٦٨٩٦	١٠,٨٢٧٦	١٠,٠٥٩١	٩,٣٧١٩	٨,٧٥٥٦	٨,٢٠١٤
١٩	١٧,٢٢٦٠	١٥,٦٧٨٥	١٤,٣٢٣٨	١٣,١٣٣٩	١٢,٠٨٥٣	١١,١٥٨١	١٠,٣٣٥٦	٩,٦٠٣٦	٨,٩٥٠١	٨,٣٦٤٩
٢٠	١٨,٠٤٥٦	١٦,٣٥١٤	١٤,٨٧٧٥	١٣,٥٩٠٣	١٢,٤٦٢٢	١١,٤٦٩٩	١٠,٥٩٤٠	٩,٨١٨١	٩,١٢٨٥	٨,٥١٣٦

القيمة الحالية = مبلغ الدفعة (القسط) X المعامل (من الجدول)

ملحق (٤): استخدام الآلة الحاسبة العلمية

تستخدم الآلةالحاسبة العلمية في حساب العمليات المعقدة أو عندما نتعامل مع أعداد كبيرة، كما أنها تستخدم في التحقق من صحة الإجابة أيضاً، وسوف نستخدمها الآن في حساب القيمة المستقبلية (ج) لمبلغ من المال، وُضع في بنك بسعر ربح مركب (ع)، ولمدة من الزمن(ن). أدرس المثال الآتي:

مثال : وُضع مبلغ ٧٣٠٠ دينار في بنك، بسعر الربح المركب ٦,٥٪ في السنة الواحدة، ولمدة ٨سنوات. احسب القيمة المستقبلية للمبلغ.

الحل:

ج = م(١ + ع)^ن = ٧٣٠٠ (١ + ٠,٠٦٥)^٨ = ٧٣٠٠(١,٠٦٥)^٨

لحساب (ج) بالآلة الحاسبة العلمية، نتبع الخطوات الآتية:

7300 X 1.065 x^y 8 = 12081.4684

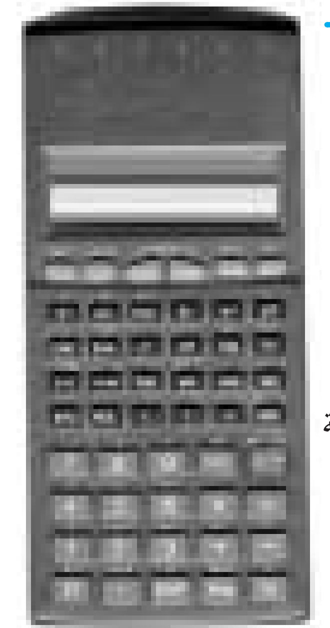
وعليه فإن القيمة المستقبلية= ١٢٠٨١,٤٦٨٤ دينار. ▪

وهناك نوع من الآلات الحاسبة العلمية، نضغط فيها على المفتاح shift قبل المفتاح x^y وتصبح الكتابة كما يلي:

إبدأ: ← 7300 X 1.065 shift x^y 8 = 12081.4684

وهناك آلات أخرى، نضغط فيها على المفتاح بدلاً من المفتاح x^y وتصبح الكتابة كما يلي:

إبدأ: ← 7300 X 1.065 8 = 12081.4684



أنشطة: باستخدام الآلة الحاسبة العلمية:

١ احسب القيم الآتية:

أ) $(0.17)^9$

ب) $(1.11)^{12}$

جـ) $(47.53)^{0.07}$

٢ وضع مبلغ 14900دينار في بنك، بسعر الربح المركب 8.5% في السنة الواحدة لمدة 12سنة. احسب القيمة المستقبلية للمبلغ.

المراجع

١- الطرق الإحصائية في التربية والعلوم الإنسانية/ الجزء الأول، د.فريد أبو زينة ورفيقاه، دار الفرقان للنشر والتوزيع.عمان/ الأردن.

2- Larson,Hostetler , Precalculus 2nd edition , D.C Heath Company Lexington .MA.1989

3- Ehrhardt M.,Brigham E . Corporate Finance A focused Approach Southwestern.2003

5- www.dhurley. com/normal.html

6- www.willamette.edu/N mjaneba/help/normal curve.html.

ساهم في انجاز هذا العمل:

لجنة المناهج الوزارية :(قرار الوزير بتاريخ ٢٣ / ١١ / ٢٠٠٢م)

- د. نعيم أبو الحمص (رئيساً)
- د. عبد الله عبد المنعم (نائب الرئيس)
- زينب الوزير (عضواً)
- جهاد زكارنة (عضواً)
- هشام كحيل (عضواً)
- د. صلاح ياسين (أمين السر)

اللجنة الفنية للمتابعة:

- د. صلاح ياسين (منسقاً)
- د. عمر أبو الحمص (عضواً)
- د. هيفاء الآغا(عضواً)
- د. غازي أبو شرخ(عضواً)
- أ. صبحي الكايد (عضواً)
- أ. جميل أبو سعدة (عضواً)
- أ. منير الخالدي (عضواً)
- مديرالقياس والتقويم (عضواً)

المشاركون في ورشة عمل الكتاب: سهيل صالحة

عبد الرحمن عزام	هاشم عبيد	عصام مطر
محمد ذياب	نجاح هندي	منال زرينة
رائد ملاك	علا رياض عواد	وهبة جمعة ثابت
وهيب وجيه جبر	حسن توفيق	نبيل الجولاني
محمد واصف دراوشة	محمد عواد	إيناس زهران
أحلام صلاح	أماني الأخضر	عماد صلاح
طارق محمد زيود	عبد الكريم صالح	جوهر حسني جمل

تم الجزء الأول بحمد الله،

